

PC* 25 - DEVOIR N° 9

corrigé

Expérience de Jean Perrin

Q 1. Reproduire la démonstration de l'équation de la diffusion vue en cours. Prendre le temps de définir le système et de distinguer la variation du stock de particules d'une part, et les échanges d'autre part.

Q 2. La diffusion thermique est régie par une équation analogue. On peut encore citer l'évolution du champ magnétique dans un matériau ohmique ou, dans certaines conditions annulant l'accélération convective et le gradient de pression, la diffusion visqueuse du mouvement dans un fluide.

Q 3. La grandeur M représente un nombre de particules par unité de surface mais, pour alléger la rédaction, nous parlerons ici de « nombre de particules » (il faudrait en toute rigueur multiplier par la section). À l'instant t_m , le nombre de particules dans le segment d'indice k est $M(x_k, t_m)$. Pendant la durée τ , chacune de ces particules a une probabilité p de quitter ce segment vers la droite, et la même probabilité de le quitter vers la gauche. Le nombre de particules qui quittent ce segment est donc $2pM(x_k, t_m)$.

Le segment situé à sa gauche possède $M(x_{k-1}, t_m)$ particules parmi lesquelles certaines sont se déplacer vers le segment d'indice k ; elles sont au nombre de $pM(x_{k-1}, t_m)$. De même, $pM(x_{k+1}, t_m)$ particules rejoignent le segment d'indice k depuis le segment d'indice $k+1$.

Au total, le nombre de particules reçues algébriquement par ce segment pendant la durée τ est

$$pM(x_{k-1}, t_m) + pM(x_{k+1}, t_m) - 2pM(x_k, t_m) \quad .$$

Ce transfert s'identifie à la variation du nombre de particules contenus dans le segment d'indice k entre les instants t_m et t_{m+1} :

$$M(x_k, t_{m+1}) - M(x_k, t_m) = pM(x_{k-1}, t_m) + pM(x_{k+1}, t_m) - 2pM(x_k, t_m) \quad .$$

En divisant par $n_0 a$ on obtient

$$u_{k,m+1} - u_{k,m} = p(u_{k+1,m} + u_{k-1,m} - 2u_{k,m}) \quad .$$

Q 4. À l'ordre 1 en τ , on peut écrire

$$u_{k,m+1} - u_{k,m} = u(ka, m\tau + \tau) - u(ka, m\tau) \simeq \tau \frac{\partial u}{\partial t}(ka, m\tau) \quad .$$

On écrit deux développements de Taylor à l'ordre 2.

$$\begin{aligned} u_{k+1,m} &= u(ka + a, m\tau) \simeq u(ka, m\tau) + a \frac{\partial u}{\partial x}(ka, m\tau) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(ka, m\tau) \\ u_{k-1,m} &= u(ka - a, m\tau) \simeq u(ka, m\tau) - a \frac{\partial u}{\partial x}(ka, m\tau) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(ka, m\tau) \end{aligned}$$

On en déduit

$$u_{k+1,m} + u_{k-1,m} - 2u_{k,m} \simeq a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(ka, m\tau) \quad .$$

L'équation obtenue dans la question précédente s'écrit donc approximativement

$$\tau \frac{\partial u}{\partial t} = pa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{pa^2}{\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad .$$

En posant $D = pa^2/\tau$, on retrouve bien l'équation de la diffusion.

Q 5. L'indice $k = 0$ correspond aux particules collées à la paroi et l'indice $k = 1$ au segment jouxtant la paroi. Parmi les $M(a, \tau_m)$ particules de ce segment, $pM(a, m\tau)$ se déplacent vers la gauche et se collent à la paroi. Ainsi, le nombre de particules sur la paroi augmente et

$$M(0, m\tau + \tau) = M(0, m\tau) + pM(a, m\tau) \quad \boxed{u_{0,m+1} = u_{0,m} + pu_{1,m}} \quad \text{en divisant par } n_0a \quad .$$

La variation du nombre de particules du segment d'indice $k = 1$ se détermine de manière analogue à ceux d'indice $k \geq 2$ (question 4), mais il n'y a pas de particules venant de la gauche puisque les particules de la paroi ne peuvent pas la quitter. On utilise donc le résultat de Q44, en enlevant le terme u_{k-1} et en remplaçant k par 1.

$$u_{1,m+1} - u_{1,m} = p(u_{2,m} - 2u_{1,m}) \quad \text{ou encore} \quad \boxed{u_{1,m+1} = pu_{2,m} + (1 - 2p)u_{1,m}} \quad .$$

Q 6. Passés les 200 premiers instants, le graphe représentant u_0^2 en fonction de t/τ est presque confondu avec une droite de pente

$$q = \frac{44 - 20}{400 - 200} = 0,12 \quad u_0^2 \simeq 0,12 \frac{t}{\tau} \quad .$$

$$M_0^2 = n_0^2 a^2 u(0, t)^2 \simeq n_0^2 a^2 \times 0,12 \frac{t}{\tau} \quad .$$

Comme $p = 0,1$ et $a^2/\tau = D/p = 10D$, on obtient

$$M_0(t)^2 = 0,12n_0^2 \times 10D = 1,2n_0^2Dt \quad \alpha = 1,2 \quad .$$

Q 7. Les résultats de l'expérience de Perrin représentés figure 6 peuvent être modélisés par une droite :

$$N = A\sqrt{t} \quad \text{avec} \quad A = \frac{640 - 100}{12 - 2} = 54 \text{ h}^{-1/2} = \frac{54}{60} \text{ s}^{-1/2} \quad .$$

Le nombre de particules par unité de surface sur la paroi est

$$M(0, t) = \frac{N(t)}{S} = \frac{A}{S}\sqrt{t} = b\sqrt{t} \quad \text{avec} \quad b = 4,29 \cdot 10^7 \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1/2} \quad .$$

On a dans l'expérience $M(0, t)^2 = b^2t$ et d'après la simulation $M(0, t)^2 = \alpha n_0^2Dt$ donc $b^2 = \alpha n_0^2D$ et

$$D = \frac{b^2}{\alpha n_0^2} \quad \boxed{D = 2,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} \quad .$$

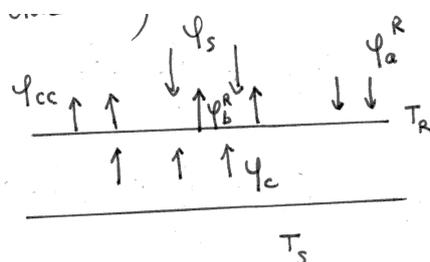
Q 8.

$$k_B = \frac{6\pi\eta r D}{T} = 1,3 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \quad N_A = \frac{R}{k_B} = 6,5 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad .$$

L'écart relatif à la valeur admise aujourd'hui est de l'ordre 10%. Je trouve ce résultat excellent pour une expérience réalisée en 1908, à une époque où on ne disposait d'aucun moyen pour manipuler la matière à l'échelle moléculaire et où l'hypothèse atomique était encore discutée.

Récupération d'énergie sous la chaussée

1. Faire un dessin en orientant les flux.



2. Le flux surfacique (aussi appelé émittance) émis par un corps noir de température T vaut σT^4 .
3. L'énoncé demande d'exprimer cette résistance thermique mais la démonstration n'est pas exigée. $R_{th} = L/(\lambda S)$. Ici, la résistance thermique de la couche de terre d'épaisseur p est $R_{th} = p/(\lambda S)$ et donc

$$\Phi_c = \frac{T_S - T_R}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{p} (T_S - T_R) \quad \varphi_c = \frac{\Phi_c}{S} = \frac{\lambda}{p} (T_S - T_R) \quad .$$

4. La route reçoit ϕ_c , φ_a^R et φ_S , elle émet φ_{cc} et φ_b^R . À l'équilibre,

$$\varphi_a^R + \varphi_S + \varphi_c = \varphi_{cc} + \varphi_b^R \quad \text{d'où} \quad \varphi_S + \frac{\lambda}{p} (T_S - T_R) + \sigma T_A^4 = h(T_R - T_A) + \sigma T_R^4 \quad .$$

5.

$$\varphi_b^R - \varphi_a^R = \sigma(T_R^4 - T_A^4) = \sigma(T_R - T_A)(T_R^3 + T_R^2 T_A + T_R T_A^2 + T_A^3) \simeq \sigma(T_R - T_A) \times 4T_A^3 \quad \boxed{\alpha = 3 \quad B = 4\sigma}$$

6. L'équation de la question 4 s'écrit approximativement

$$\varphi_S + \frac{\lambda}{p} (T_S - T_R) = h(T_R - T_A) + 4\sigma T_A^3 (T_R - T_A)$$

d'où

$$\boxed{T_R = \frac{\varphi_S + hT_A + 4\sigma T_A^3 + \frac{\lambda}{p} T_S}{h + 4\sigma T_A^3 + \frac{\lambda}{p}}} \quad .$$

7. Au numérateur,

$$\varphi_S = 400 \text{ W.m}^{-2} \quad hT_A = 3000 \text{ W.m}^{-2} \quad 4\sigma T_A^3 = 1847 \text{ W.m}^{-2} \quad \frac{\lambda}{p} T_A = 29 \text{ W.m}^{-2} \quad .$$

Au dénominateur,

$$h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \quad 4\sigma T_A^3 = 6,2 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \quad \frac{\lambda}{p} = 0,1 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \quad .$$

Dans les deux cas, on peut négliger les termes en h/p , c'est à dire négliger les échanges avec la terre. Sous cette approximation,

$$T_R \approx T_A + \frac{\varphi_S}{h + 4\sigma T_A^3} \quad .$$

8. $T_R = 325 \text{ K} = 52^\circ\text{C}$. Cette valeur me paraît raisonnable pour un objet noir en plein soleil. Lorsque le rayonnement solaire est très intense, on peut faire cuire un œuf sur une plaque ensoleillée car on atteint la température de coagulation de l'albumine de 63°C . Ici la valeur est un peu plus basse car on a pris une valeur modérée de φ_S .

9. Il convient d'ajouter φ_E aux termes perdus par la route.

$$\varphi_S + \varphi_c + \varphi_a^R = \varphi_{cc} + \varphi_b^R + \varphi_e \quad .$$

On néglige comme plus haut le terme φ_c pour trouver

$$\varphi_E = \varphi_a^R + \varphi_S - \varphi_{cc} = \varphi_b^R \quad \boxed{\varphi_E = \varphi_S + 4\sigma T_A^3 (T_A - T_R) + h(T_A - T_R)} \quad .$$

Pour que la chaleur diffuse de la route vers les tuyaux où circuler l'eau de température T_C , il est nécessaire d'avoir $T_R \geq T_C$. À la limite $T_R = T_C$ et

$$\varphi_E = \varphi_S + (4\sigma T_A^3 + h)(T_A - T_R) \quad \varphi_E = 449 \text{ W.m}^{-2} \quad .$$

10. Calculons le temps de diffusion sur une épaisseur e de bitume.

$$\tau_{\text{diff}} = \frac{e^2}{D} = 5.10^3 \text{ s} \simeq 1\text{h}23 \text{ min.}$$

Les variations de T_A se font en général sur des durées de l'ordre de la demi-journée, plus longues que deux heures, donc T_R a le temps de s'uniformiser à la profondeur e . Cela légitime l'hypothèse selon laquelle T_R est uniforme. Ce ne serait pas le cas si un averse brutale refroidissait l'atmosphère en quelques minutes.

Conduction thermique dans un réservoir d'énergie

34. D'après la loi de Fourier, $|j_z| = \lambda dT/dz$. Ce flux traverse la section d'aire L_e^2 et cela dure pendant Δt . Donc le transfert thermique des pertes est donné par

$$Q = \lambda \frac{dT}{dz} L_e^2 \Delta t = 5,2 \cdot 10^7 \text{ J} \quad .$$

$Q/U = 3 \cdot 10^{-5}$ ces pertes sont négligeables.

35. a) La résistance thermique du matériau serait $R_{th} = H/(\lambda S)$ donc l'écart de température

$$T_1 - T_2 = \frac{H}{\lambda S} \Phi \quad .$$

- b) **Mode parallèle**

La section du solide est $S_s = (1 - \epsilon)S$ et sa longueur H . Donc sa conductance est $G_s = \lambda_s(1 - \epsilon)S/H$. De même la conductance du gaz est $G_g = \lambda_g \epsilon S/H$. Comme les deux sont en parallèle, la conductance globale est

$$G_{\parallel} = G_s + G_g = \frac{S}{H} ((1 - \epsilon)\lambda_s + \epsilon\lambda_g) \quad .$$

En les deux faces, l'écart de température est $(T_1 - T_2) = \Phi/G_{\parallel}$. La conductivité effective est telle qu'en utilisant dans l'expression de a), on obtienne le même écart de température.

$$\frac{H}{\lambda S} = \frac{1}{G_{\parallel}} \quad \lambda_{\parallel} = \frac{HG_{\parallel}}{S} \quad \boxed{\lambda_{\parallel} = (1 - \epsilon)\lambda_s + \epsilon\lambda_g}$$

- c) **Mode série**

Le solide a pour section S et pour longueur $(1 - \epsilon)H$, le gaz a pour section S et pour longueur ϵH . Donc leurs résistances respectives sont

$$R_s = \frac{(1 - \epsilon)H}{\lambda_s S} \quad R_g = \frac{\epsilon H}{\lambda_g S} \quad .$$

Elles sont associées en série donc la résistance globale est

$$R_{\text{serie}} = R_s + R_g \quad .$$

La conductivité équivalente est celle qui donnerait la même conductance, c'est à dire

$$\frac{\lambda_{\text{serie}} S}{H} = \frac{1}{R_{\text{serie}}} = \frac{1}{\frac{(1 - \epsilon)H}{\lambda_s S} + \frac{\epsilon H}{\lambda_g S}} \quad \boxed{\lambda_{\text{serie}} = \frac{1}{\frac{1 - \epsilon}{\lambda_s} + \frac{\epsilon}{\lambda_g}}} \quad .$$

- d) Pour $\epsilon = 0$, on obtient $\lambda_{\parallel} = \lambda_{\text{serie}} = \lambda_s$ ce qui traduit le fait que le solide occupe seul tout l'espace. De même, pour $\epsilon = 1$, on obtient $\lambda_{\parallel} = \lambda_{\text{serie}} = \lambda_g$: le gaz occupe seul tout l'espace.

36. Analysons d'abord des cas particuliers.

— Si $\lambda_g = 0$, $\lambda_{\parallel} = (1 - \epsilon)\lambda_s$ et $\lambda_{\text{serie}} = 0$, donc $\lambda_{\text{serie}} < \lambda_{\parallel}$.

— Si $\lambda_s = 0$, $\lambda_{\parallel} = \epsilon\lambda_g$ et $\lambda_{\text{serie}} = 0$ donc $\lambda_{\text{serie}} < \lambda_{\parallel}$.

Démontrons que l'inégalité $\lambda_{\text{serie}} \leq \lambda_{\text{parallèle}}$ a toujours lieu. Cela n'est pas facile!

$$\frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\text{serie}}} = [(1 - \epsilon)\lambda_s + \epsilon\lambda_g] \left[\frac{1 - \epsilon}{\lambda_s} + \frac{\epsilon}{\lambda_g} \right] = (1 - \epsilon)^2 + \epsilon^2 + \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_g} + \frac{\lambda_g}{\lambda_s} \right) \epsilon(1 - \epsilon) \quad .$$

En étudiant la fonction $u \mapsto u + 1/u$, on montre que $\frac{\lambda_s}{\lambda_g} + \frac{\lambda_g}{\lambda_s} \geq 2$. Donc

$$\frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\text{serie}}} \geq (1 - \epsilon)^2 + \epsilon^2 + 2\epsilon(1 - \epsilon) = 1 \quad \text{et donc} \quad \lambda_{\parallel} \geq \lambda_{\text{serie}} \quad .$$

On peut aussi démontrer l'inégalité en calculant $\lambda_{\parallel} - \lambda_{\text{serie}}$.

37. $\lambda_{\max} = \lambda_{\parallel} = 0,22 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\lambda_{\min} = 0,036 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

38. La température suit l'équation de la diffusion thermique $\Delta T - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ qui s'écrit en coordonnées cylindriques

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad .$$

On peut redémontrer cette équation en appliquant le premier principe à une zone cylindrique comprise entre les rayons r et $r + dr$, mais ce n'est pas demandé et il est plus rapide d'utiliser directement l'expression du laplacien.

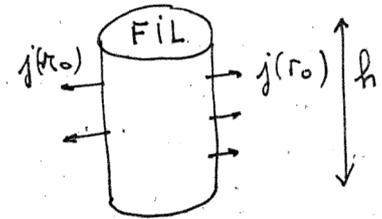
39. La loi d'échelle de la diffusion donne $L \simeq \sqrt{\alpha t}$.

Par définition de φ_L , une longueur h de fil émet le flux $\Phi = \varphi_L h$.

Ce flux pénètre dans le matériau avec une densité de flux thermique $j(r_0, t)$ et la continuité du flux permet d'écrire $\Phi = 2\pi r_0 h j(r_0, t)$. En

40. identifiant les deux expressions de Φ on a $j(r_0, t) = \varphi_L / (2\pi r_0)$. Enfin, en utilisant la loi de Fourier, on en déduit

$$\frac{\partial T}{\partial r}(r_0, t) = -\frac{\varphi_L}{2\pi r_0 \lambda} \quad .$$



41. On définit les temps longs par $Dt \gg r_0^2$: la chaleur diffuse sur une longueur bien supérieure à r_0 . Dans ce cas, $r_0^2 / (4Dt) \ll 1$ et on peut utiliser l'approximation de la fonction E fournie par l'énoncé pour écrire

$$T(r_0, t) \approx T_0 - \frac{\varphi_L}{4\pi\lambda} \left(\gamma + \ln \frac{r_0^2}{4Dt} \right) \quad .$$

42. L'expression de la question précédente se réécrit

$$T(r_0, t) - T_0 \approx -\frac{\varphi_L}{4\pi\lambda} \left(\gamma + \ln \frac{r_0^2}{4D} \right) + \frac{\varphi_L}{4\pi\lambda} \ln t \quad .$$

On attend donc que $T(r_0, t) - T_0$ présente, pour des temps suffisamment longs, un comportement linéaire avec $\ln t$.

Sur la figure, on voit que pour des temps suffisamment longs (disons pour $t \geq 3$ s), le graphe de ΔT se rapproche fortement d'une droite, autrement dit $T(r_0, t) - T_0$ varie de manière quasi linéaire en fonction de $\ln t$. C'est bien ce qu'on attendait.

43. Sur la graphique on mesure une pente $p = 6,8 \text{ K}$.

$$\frac{\varphi_L}{4\pi\lambda} = p \quad \lambda = \frac{\varphi_L}{4\pi p} = \frac{\Phi/\ell}{4\pi p} \quad \boxed{\lambda = 0,037 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}}$$

44. La valeur obtenue est bien dans l'intervalle $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ déterminé dans la question 37. On est cependant très proche de la borne inférieure, ce qui laisse penser que la réalité est plus proche du modèle série.

Plateforme stabilisatrice

Q 1. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le solide à l'équilibre subit son poids $\vec{P} = \rho V \vec{g}$ et la poussée d'Archimède $-\rho_\ell V \vec{g}$; la somme de ces deux forces vaut $(\rho - \rho_\ell) V \vec{g}$.

- Si $\rho > \rho_\ell$, cette somme est de même sens que \vec{g} donc le solide tend à couler vers le fond;
- si $\rho < \rho_\ell$, cette somme est de sens opposé à \vec{g} donc le solide tend à remonter vers la surface.

Ce raisonnement suppose le solide et le fluide à l'équilibre, ce qui n'est possible que par l'intervention d'une autre force qui maintient le solide en place malgré sa propension à monter ou à descendre.

Q 2. Si l'espace qu'occupe le solide était occupé par le fluide, cette partie du fluide subirait, en plus de son poids $\rho_\ell V \vec{g}$, la force d'inertie d'entraînement $-\rho_\ell V \vec{a}_e$. Ce fluide « déplacé » par le solide subirait donc $\rho_\ell V (\vec{g} - \vec{a}_e)$. La poussée d'Archimède est égale à l'opposée de cette somme, elle vaut $\boxed{\vec{\Pi}_A = -\rho_\ell V (\vec{g} - \vec{a}_e)}$. Pour bien comprendre cette argumentation, il peut être bon de revoir la démonstration du principe d'Archimède vue dans le cours de PCSI.

Q 3. Le solide Σ subit deux forces appliquées en G_0 : $\vec{\Pi}_{A0} = -\rho_\ell V_0 \vec{g}$ et $\vec{P}_0 = \rho_0 V_0 \vec{g}$, dont la somme est $(\rho_0 - \rho_\ell) V_0 \vec{g} = \vec{0}$ car $\rho_\ell = \rho_0$. De même, $(\rho_1 - \rho_\ell) V_1 \vec{g}$ s'applique sur G_1 et $(\rho_2 - \rho_\ell) V_2 \vec{g}$ sur G_2 . La résultante et le moment en C de ces forces sont

$$\vec{R} = [(\rho_1 - \rho_\ell) V_1 + (\rho_2 - \rho_\ell) V_2] \vec{g} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}_C = \overrightarrow{CG_1} \wedge (\rho_1 - \rho_\ell) V_1 \vec{g} + \overrightarrow{CG_2} \wedge (\rho_2 - \rho_\ell) V_2 \vec{g} .$$

Q 4. La propulsion à flotter de S_1 est compensée par celle à couler de S_2 si $\vec{R} = \vec{0}$, c'est à dire si

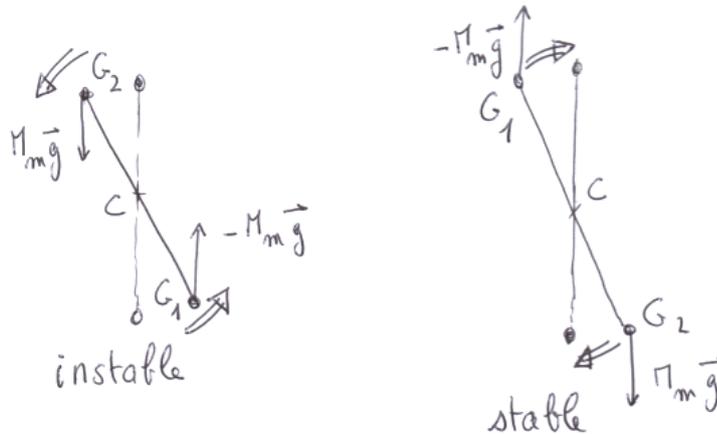
$$(\rho_1 - \rho_\ell) V_1 = -(\rho_2 - \rho_\ell) V_2 .$$

Q 5. Si la condition de la question précédente est satisfaite,

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_C &= -\overrightarrow{CG_1} \wedge (\rho_2 - \rho_\ell) V_0 \vec{g} + \overrightarrow{CG_2} \wedge (\rho_2 - \rho_\ell) V_2 \vec{g} \\ &= (\overrightarrow{CG_2} - \overrightarrow{CG_1}) \wedge (\rho_2 - \rho_\ell) V_2 \vec{g} \\ &= (\rho_2 - \rho_\ell) V_2 \overrightarrow{G_1 G_2} \wedge \vec{g} . \end{aligned}$$

$$\vec{\Gamma}_C = M_m \overrightarrow{G_1 G_2} \wedge \vec{g} \quad \text{avec} \quad M_m = (\rho_2 - \rho_\ell) V_2$$

Q 6. Le système Σ est soumis à la tension du fil s'exerçant en C mais comme son moment est nul, on peut en faire abstraction. À l'équilibre, on a $\vec{\Gamma}_C = \vec{0}$ donc le vecteur $\overrightarrow{G_1 G_2}$ est parallèle à \vec{g} , dirigé selon la verticale. Le solide S_2 est plus dense que le solide S_1 donc la position d'équilibre stable est atteinte lorsque G_2 se trouve en dessous de G_1 . Si G_2 se trouvait en haut et G_1 en bas, l'équilibre serait instable. On le voit en analysant la tendance du système à tourner autour de C en cas d'écart à la position d'équilibre. Le point G_2 subit $M_m \vec{g}$ dirigé vers le bas et G_1 subit $-M_m \vec{g}$ dirigé vers le haut.



Q 7. En déplaçant la vis de gauche à droite (ou de droite à gauche), on déplace G_2 horizontalement. On peut ainsi le placer dans une position où $G_1 G_2$ est orthogonal à la plateforme. À l'équilibre stable, $G_1 G_2$ se place verticalement dont la plateforme est horizontale. On assure ainsi l'horizontalité statique de la plateforme.

Q 8. On applique le théorème du moment cinétique à Σ_0 , par rapport à l'axe (O, \vec{u}_y) fixe dans \mathcal{R}_T supposé galiléen.

— Le moment cinétique est $L_{Oy} = m_{\text{eff}} (\ell \vec{u}_r \wedge \ell \dot{\theta} \vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_y = m_{\text{eff}} \ell^2 \dot{\theta}$.

— Le moment du poids est $\Gamma_{Oy}(\vec{P}) = (\ell \vec{u}_r \wedge m \vec{g}) \cdot \vec{u}_y = -m \ell g \sin \theta$ avec $m = \rho_0 V_0$.

— Le moment de la poussée d'Archimède est $\Gamma_{Oy}(\vec{\Pi}_A) = \rho_\ell V_0 g \sin \theta$.

Le TMC s'écrit donc

$$m_{\text{eff}} \ell^2 \ddot{\theta} = -\rho_0 V_0 \ell g \sin \theta + \rho_\ell V_0 g \sin \theta \quad \ddot{\theta} + \frac{(\rho_0 - \rho_\ell) V_0 g}{m_{\text{eff}} \ell} \sin \theta = 0 .$$

Dans l'approximation des petits angles, on obtient $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell_{\text{eff}}}} \quad \text{et} \quad \ell_{\text{eff}} = \frac{m_{\text{eff}}}{m_{\text{app}}} \ell .$$

Q 9. Avec $\rho_\ell = 0,99\rho_0$, on obtient

$$m_{\text{eff}} = \rho_0 V_0 + 20 \times 0,99\rho_0 V_0 = 20,8\rho_0 V_0 \quad m_{\text{app}} = 0,01\rho_0 V_0 \quad \frac{m_{\text{eff}}}{m_{\text{app}}} = 2080$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2080\ell}} = \frac{\omega_{0\text{vide}}}{45,6} \quad \text{avec} \quad \omega_{0\text{vide}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 45,6 \times \frac{2\pi}{\omega_{0\text{vide}}} \quad \boxed{T_0 = 45,6 T_{0\text{vide}}}$$

Q 10. La brochure commerciale donne $T_0 = 40$ s. On en déduit

$$\ell_{\text{eff}} = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{gT_0^2}{4\pi^2} \quad \boxed{\ell_{\text{eff}} = 397 \text{ m}} \quad ,$$

valeur qui confirme les 400 mètres annoncés. On peut aussi, en sens inverse, calculer $T_0 = 40$ s en prenant $\ell_{\text{eff}} = 400$. La longueur réelle est $\ell = \ell_{\text{eff}}/2080$ ce qui donne $\boxed{\ell = 19,1 \text{ cm}}$.

Q 11. Le référentiel \mathcal{R}_S n'est pas galiléen ; l'accélération d'entraînement est ici $\vec{a}_e = \vec{a}$. La poussée d'Archimède devient $\vec{\Pi}_A = -\rho_\ell V_0(\vec{g} - \vec{a}) = -\rho_\ell V_0\vec{g} + \rho_\ell V_0\vec{a}$. Le pendule subit aussi la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -\rho_0 V_0\vec{a}$.

Q 12. On applique comme plus haut le TMC à Σ_0 , en tenant compte des moments des forces supplémentaires.

- Le terme nouveau $\rho_\ell V_0\vec{a}$ dans la poussée d'Archimède a pour moment $\Gamma_{Oy}(\rho_\ell V_0\vec{a}) = (\ell\vec{u}_r \wedge \rho_\ell V_0 a\vec{u}_x) \cdot \vec{u}_y = -\rho_\ell V_0 \ell a \cos \theta$.
- La force d'inertie a pour moment $\Gamma_{Oy}(\vec{F}_{ie}) = \rho_0 V_0 a \ell \cos \theta$.
- Comme $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, la force de frottement visqueux a pour moment $(\ell\vec{u}_r \wedge (-\beta\ell\dot{\theta})\vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_y = -\beta\ell^2\dot{\theta}$.

Le TMC s'écrit

$$m_{\text{eff}}\ell^2\ddot{\theta} = (\rho_\ell - \rho_0)V_0\ell g \sin \theta + (\rho_0 - \rho_\ell)V_0 a \ell \cos \theta - \beta\ell^2\dot{\theta}$$

$$m_{\text{eff}}\ell^2\ddot{\theta} = -m_{\text{app}}g\ell \sin \theta + m_{\text{app}}a\ell \cos \theta - \beta\ell^2\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\beta}{m_{\text{eff}}}\dot{\theta} + \frac{m_{\text{app}}g}{m_{\text{eff}}\ell} \sin \theta = \frac{m_{\text{app}}a}{m_{\text{eff}}\ell} \cos \theta \quad .$$

Dans l'approximation des petits angles, $\sin \theta \simeq \theta$ et $\cos \theta = 1$. O, obtient

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{a}{\ell_{\text{eff}}} \cos \theta \quad \text{avec} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\beta}{m_{\text{eff}}} \quad \boxed{Q = \frac{m_{\text{eff}}\omega_0}{\beta}} \quad .$$

Q 13. En reportant la représentation complexe dans la relation précédente on obtient

$$-\omega^2\theta_m + \frac{\omega_0}{Q}j\omega\theta_m + \omega_0^2\theta_m = \frac{a_0}{\ell_{\text{eff}}} \quad \boxed{\theta_m = \frac{a_0/\ell_{\text{eff}}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}} \quad .$$

Q 14.

$$\theta_m = \frac{a_0}{\ell_{\text{eff}}\omega_0^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}} \quad \theta_0 = \frac{a_0}{\ell_{\text{eff}}\omega_0^2} = \frac{a_0}{g} \quad \boxed{H(j\omega) = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Cette fonction de transfert est associée à un filtrage passe-bas d'ordre 2.

Q 15. Si le pendule oscillait dans l'air, le terme en $1/Q$ serait absent puisqu'on néglige les frottements. La pulsation propre serait remplacée par $\omega_{0\text{vide}}$ et on donc

$$\boxed{H_1(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0\text{vide}}^2}}} \quad \text{avec} \quad \omega_{0\text{vide}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

On peut remarquer que l'expression de θ_0 ne serait pas modifiée.

Q 16. — Sans liquide, on observe la résonance à la fréquence $f_{0\text{vide}}$ un peu au dessus de 1 Hz. La plateforme est donc très affectée par les mouvements perturbateurs.

- Avec la plateforme stabilisée, on a un comportement de type passe-bas comme attendu. Un passe-bas d'ordre deux peut présenter une résonance, mais ici le facteur de qualité est choisi suffisamment bas pour que cela n'arrive pas.

— Comme $G_1 < G$, les oscillations parasites sont atténuées, et ce d'autant mieux que la fréquence est plus élevée.

Les plus grandes vibrations sont obtenues pour $f = 0,03 \text{ Hz}$ avec $G = -20 \text{ dB}$, donc $|\underline{H}| = 10^{-1}$ et

$$|\underline{\theta}_m| = \theta_0 |\underline{H}| = \frac{a_0}{g} \times 10^{-1} \quad \boxed{|\theta_m| = 0,01 \text{ rad} = 0,57^\circ} \quad .$$

Chauffage par induction

Ce sujet est très mathématique : les équations physiques sont pour l'essentiel données et ensuite, il s'agit de manipuler un outil nouveau, introduit sans la rigueur à laquelle les élèves de CPGE sont habitués en maths.

Q 1. Reproduire la démonstration de l'équation de la diffusion thermique vue en cours. Le premier terme décrit les variations temporelles de l'énergie interne, le seconde les échanges par conduction et le troisième le chauffage interne par effet Joule. Pour la démonstration, il vaut mieux compter cet effet comme un travail δW : il s'agit du travail du champ électrique sur les porteurs de charge. Mais beaucoup de professeurs écrivent δQ_J .

Q 2.

$$P_s = \int_0^\infty p_J(z) dz = \int_0^\infty p_0 e^{-2z/\delta} dz = \frac{\delta p_0}{2}$$

L'énoncé n'aide pas à comprendre la définition P_s et je fournis une explication non demandée. Prenons une portion d'aire S de la surface du métal, dans le plan d'équation $z = 0$. En face d'elle, de $z = 0$ jusqu'à $z \rightarrow \infty$, s'étend le métal. La puissance dissipée dans cette région est

$$P_J = \int_0^\infty S dz p_J(z) \quad \text{donc} \quad \frac{P_J}{S} = \int_0^\infty p_J(z) dz \quad .$$

L'intégrale proposée par l'énoncé est donc bien une puissance par unité de surface. Elle se répartit en profondeur, mais dans la suite on fait comme si elle était injectée en $z = 0$ alors qu'elle est injectée sur une épaisseur de l'ordre de quelques fois δ . Cela revient à supposer que δ est petit devant l'échelle sur laquelle on analyse les variations de température.

Q 3. Il faut comprendre que dans le modèle surfacique, toute la puissance Joule est concentrée en $z = 0$. Pour $z > 0$, elle n'intervient plus donc T vérifie

$$\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad .$$

Comme \hat{T} et T ne diffèrent que par une constantes, leurs dérivées sont égales donc \hat{T} vérifie

$$\rho c_P \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial z^2} = 0 \quad .$$

Passons aux conditions initiales et conditions de bord.

— À $t = 0$, le matériau est à la même température que l'air qui l'entoure (l'énoncé n'est pas très explicite à ce sujet).

$$\forall z > 0, T(z, t = 0) = T_0 \quad \text{donc} \quad T(z, t = 0) - T_0 = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad \hat{T}(z, t = 0) = 0 \quad .$$

— Comme la diffusion s'étale progressivement dans l'espace, à t donnée, pour $z \rightarrow \infty$, la température est identique à la température initiale T_0 . Donc

$$\forall t \geq 0, \lim_{z \rightarrow \infty} T(z, t) = T_0 \quad \text{donc} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \hat{T}(z, t) = 0 \quad .$$

- Prenons comme système une zone de la surface d'aire S (comme dans la question 2). En réalité, il s'agit d'un volume d'aire S et d'épaisseur égale à quelques fois δ , mais dans le modèle surfacique adopté, ce volume est négligé et on suppose que tout se passe en surface. Entre les instants t et $t + dt$, ce système reçoit le travail $\delta W = P_s S dt$. Il évacue aussi de la chaleur par conduction vers le reste du métal et le transfert thermique associé, orienté vers la surface considérée, est $\delta Q = -j(0^+) S dt$. D'après la loi de Fourier,

$$\delta Q = k \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(z = 0, t) S dt \quad .$$

Comme ce système est supposé d'épaisseur nulle, son énergie interne est nulle et sa variation l'est aussi. Le premier principe s'écrit donc

$$0 = P_s S dt + k \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(z = 0, t) S dt \quad \text{donc} \quad k \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(z = 0, t) = -P_s \quad .$$

Ce raisonnement est un peu délicat à cause de caractère « surfacique » du système considéré. Dans un modèle volumique, on prendrait un système s'étendant entre $z = 0$ et $z = H$ et premier principe s'écrirait

$$\int_0^H \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} S dz = \int_0^H p_J(z) S dz + S k \frac{\partial T}{\partial t}(H, t) \quad .$$

On obtient le résultat demandé en prenant H suffisamment grand devant δ pour l'approximer par ∞ dans l'intégrale avec p_J , mais suffisamment petit pour le remplacer par 0 dans les autres termes. Bref, ce n'est pas évident à justifier proprement et l'énoncé n'attend visiblement pas autant de rigueur.

Q 4. L'énoncé utilise un abus de notation courant en physique : on note $f(s)$ au lieu de $\tilde{f}(s)$. De manière générale, cet énoncé n'est pas très rigoureux et c'est ici très dangereux ! Quand on écrit $f(A)$, on ne sait plus de quoi on parle mais on convient que si on écrit $f(s)$, on parle de \tilde{f} , alors que si on écrit $f(t)$, on parle de f . On désigne par la même lettre deux fonctions distinctes ! Dans la suite, il faudra absolument préciser la variable t ou s des fonctions pour savoir de laquelle il s'agit.

Considérons les deux termes de l'équation de la diffusion écrite dans la question 3.

- terme en $\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}$

Pour z donné, c'est une fonction de t seulement et en utilisant la première ligne du tableau fourni, sa transformée de Laplace est

$$s \hat{T}(z, s) - \hat{T}(z, t = 0) = s \hat{T}(z, s) \quad \text{à cause de la condition initiale.}$$

- terme en $\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial z^2}$

En utilisant la troisième ligne du tableau fourni (deux fois puisqu'il s'agit d'une dérivée seconde), on obtient sa transformée de Laplace :

$$-k \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial z^2}(z, s) \quad .$$

On remarque que la transformation de Laplace est une opération linéaire. À t donné quelconque, en prenant la transformée de Laplace de l'équation de la diffusion, on obtient

$$\rho c_p s \hat{T}(z, s) - k \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial z^2}(z, s) = 0 \quad .$$

Pour s donnée, il s'agit d'une équation différentielle en z , linéaire, du second ordre et à coefficients constants. Par la méthode de l'équation caractéristique, on la résout pour obtenir

$$\hat{T}(z, s) = A e^{rz} + B e^{-rz} \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{\frac{\rho c_p s}{k}} \quad .$$

Dans ces écritures, A et B peuvent dépendre de s . Pour $z \rightarrow \infty$, $\hat{T}(z, t) \rightarrow \infty$ donc $\hat{T}(z, s) \rightarrow 0$ (question mathématique de convergence) et donc $B = 0$.

Pour trouver A , on utilise la troisième des conditions limites de la question 3. En prenant la transformée de Laplace et en utilisant les lignes 3 et 4 du tableau, on obtient

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial z}(0, s) = -\frac{P}{k s} \quad .$$

Donc

$$-rB = -\frac{P_s}{ks} \quad B = \frac{P_s}{ks} \frac{1}{r} = \frac{P_s}{\sqrt{\rho c_p k}} \frac{1}{s^{3/2}} .$$

$$\hat{T}(z, s) = \frac{P_s}{\sqrt{\rho c_p k}} \frac{1}{s^{3/2}} e^{-\sqrt{\frac{\rho c_p s}{k}} z} .$$

Q 5. Au premier ordre en z ,

$$\hat{T}(z, s) \simeq \frac{P_s}{\sqrt{\rho c_p k}} \frac{1}{s^{3/2}} \left(1 - \sqrt{\frac{\rho c_p s}{k}} z \right) = \frac{P_s}{\sqrt{\rho c_p k}} \left(\frac{1}{s^{3/2}} - \sqrt{\frac{\rho c_p}{k}} \frac{z}{s} \right) .$$

On utilise maintenant le tableau des transformées de Laplace de droite à gauche. En utilisant la cinquième et la 4^e et la 6^e ligne, on obtient

$$\hat{T}(z, t) = \frac{P_s}{\sqrt{\rho c_p k}} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} - \sqrt{\frac{\rho c_p}{k}} z \right) = P_s \left(\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi \rho c_p k}} - \frac{z}{k} \right)$$

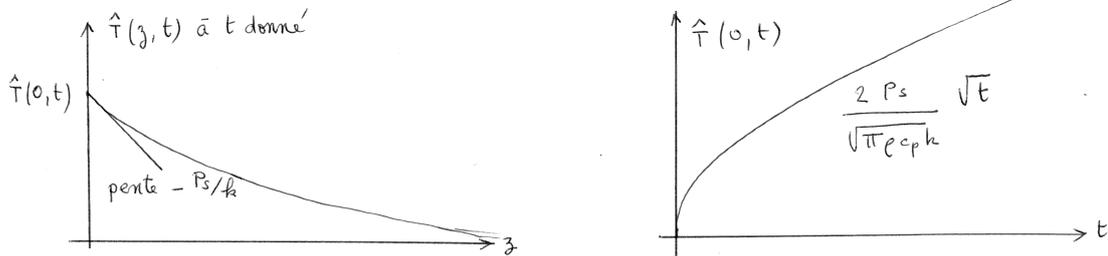
Q 6. — Avec le résultat de la question précédente, on voit que le comportement en z au voisinage de 0 est linéaire avec une pente $-P_s/k$.

— La valeur en $z = 0$ est donnée par

$$\hat{T}(0, t) = \frac{2P_s \sqrt{t}}{\sqrt{\pi \rho c_p k}}$$

— Vers l'infini, $\hat{T}(z, t)$ tend vers 0.

— Comme la matière s'échauffe, on a $\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} > 0$ et d'après l'équation de la diffusion $\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial z^2} > 0$: la courbe est convexe.



Q 7. Courbe ci-dessus. On a un croissant en \sqrt{t} qui tend vers l'infini aux temps long. Dans ce modèle, la surface peut atteindre n'importe quelle température supérieure à T_0 , en particulier celle de fusion de l'acier.

Q 8. Par rapport à la question 4, seule la condition de bord est changée. En prenant la transformée de Laplace de la nouvelle condition de bord, on obtient

$$k \frac{\partial \hat{T}(z, s)}{\partial z} = -\frac{P_s}{s} + \frac{h}{k} \hat{T}(0, s) .$$

En utilisant la solution de l'équation différentielle et en évaluant en $z = 0$, on obtient

$$-rB = -\frac{P_s}{ks} + \frac{h}{k} B \quad \text{d'où} \quad B = \frac{P_s}{hs + s^{3/2} \sqrt{\rho c_p k}} .$$

$$\hat{T}(z, s) = \frac{P_s}{hs + s^{3/2} \sqrt{\rho c_p k}} e^{-\sqrt{\frac{\rho c_p s}{k}} z} .$$

Q 9. Un calcul de limite élémentaire donne

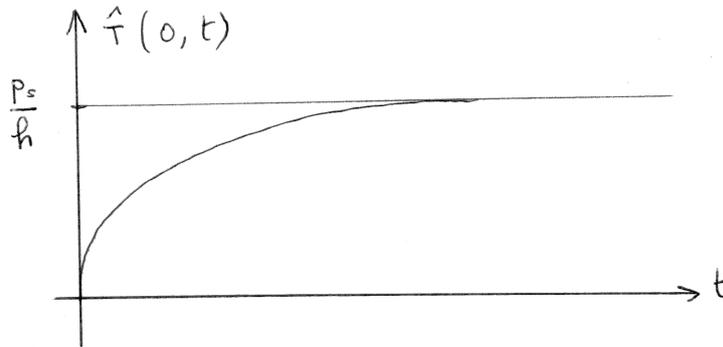
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{T}(z, t) = \frac{P_s}{h}$$

Q 10. Pour $s \rightarrow \infty$,

$$\hat{T}(z, s) \sim \frac{P_s}{s^{3/2} \sqrt{\rho c_p k}} e^{-\sqrt{\frac{\rho c_p s}{k}} z} .$$

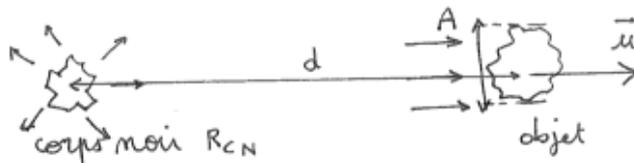
Le terme conducto-convectif proportionnel à h devient négligeable. Au voisinage de $t = 0$, la surface présente une température encore proche de la température ambiante et la conducto-convection n'est pas encore très efficace.

Q 11. Pour t voisin de 0, on retrouve d'après la question précédente le comportement en \sqrt{t} de la question 7. Mais pour t tendant vers l'infini, on a désormais une température limite P_s/h . Selon que $P_s/h + T_0$ est supérieure ou inférieure à la température de fusion de l'acier, on pourra atteindre ou non la fusion.



Concentration du rayonnement thermique

Q 1. Comme $d \gg R_{\text{objet}}$ et $d \gg R_{\text{CN}}$, le rayonnement qui parvient à l'objet est formé de rayons presque parallèles à \vec{u} . La puissance reçue par l'objet est celle qui traverse la surface projetée d'aire A : $P_r = A\varphi$, avec φ le flux surfacique.



La puissance émise par le corps noir P_e se répartit sur une sphère de rayon d avec $d \gg R_{\text{CN}}$ donc $\varphi = P_e/(4\pi d^2)$. Finalement,

$$P_r = \frac{A}{4\pi d^2} P_e \quad \boxed{\eta = \frac{P_r}{P_e} = \frac{A}{4\pi d^2}} .$$

Q 2. Le Soleil joue le rôle de l'objet source de Q1. Il se comporte comme un corps noir donc $P_{eS} = \sigma T_s^4 \times 4\pi r_s^2$. La surface projetée de la Terre est $A = \pi r_T^2$ donc elle reçoit

$$P_{rT} = \frac{A}{4\pi d_{TS}^2} P_{eS} = \frac{\pi r_T^2}{4\pi d_{TS}^2} \times \sigma T_s^4 \times 4\pi r_s^2 = \frac{\sigma T_s^4 \pi r_s^2 r_T^2}{d_{TS}^2} .$$

La Terre émet $P_{eT} = \sigma T_T^4 \times 4\pi r_T^2$. À l'équilibre, $P_{rT} = P_{eT}$. On en déduit

$$\boxed{T_{Teq} = T_s \sqrt{\frac{\beta}{2}}} \quad \text{A.N.} \quad T_{Teq} = 279 \text{ K} = 6^\circ \text{ C} .$$

Ce modèle sous-estime la température de la Terre, en réalité plus proche de 15°C .

Q 3. Si la température de la Terre passe à $T_{Teq} + \Delta T$, la puissance émise devient

$$P'_{eT} = 4\pi r_T^2 \sigma (T_{Teq} + \Delta T)^4$$

Par contre, la puissance reçue de la part du Soleil ne change pas et reste égale à $4\pi r_T^2 \sigma T_{Teq}^4$. La différence entre la puissance reçue et la puissance émise est donc

$$\Delta P = 4\pi r_T^2 \sigma [T_{Teq}^4 - (T_{Teq} + \Delta T)^4] \simeq 4\pi r_T^2 \times \sigma [-4T_{Teq}^3 \Delta T] \quad .$$

Comme ΔP est de signe opposé à celui de ΔT , la Terre va se refroidir si $\Delta T > 0$ et se réchauffer si $\Delta T < 0$: dans tous les cas, elle tend à revenir vers sa température d'équilibre. Pour trouver le temps caractéristique de ce retour, on applique le premier principe à la Terre dans son ensemble entre les instants t et $t + dt$.

$$C_T dT_T = \Delta P dt \quad .$$

Comme $\Delta T = T_T - T_{Teq}$, $d\Delta T = dT_T$ et

$$\begin{aligned} C_T \frac{d\Delta T_T}{dt} &= \Delta P = -16\pi r_T^2 \sigma T_{Teq}^3 \Delta T \\ \frac{d\Delta T}{dt} + \frac{16\pi r_T^2 \sigma T_{Teq}^3}{C_T} \Delta T &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Dans cette équation diff du premier ordre, on identifie la constante de temps $\tau = C_T / (16\pi r_T^2 \sigma T_{Teq}^3)$. Comme $C_T = \frac{4}{3}\pi r_T^3 c_T \rho_T$,

$$\tau = \frac{c_T r_T \rho_T}{12\sigma T_{Teq}^3} = 2,38 \cdot 10^{12} \text{ s} = 79 \cdot 10^3 \text{ ans} \quad .$$

Ce calcul me paraît aberrant : seule une fine couche à la surface de la Terre est concernée par les échanges avec le Soleil. Utiliser la capacité calorifique de la Terre entière est déraisonnable !

Q 4. La Terre se refroidit la nuit et se réchauffe la jour. Il y a un écart de température entre la face éclairée et la face à l'ombre. On peut négliger ces variations si $\tau \gg 1$ jour. Avec la valeur de τ obtenue ci-dessus, cela est très largement vérifié et considérer la température de la Terre comme uniforme est correct.

Ces raisonnements passent sous silence le rôle très important de la convection associée au mouvement des enveloppes fluides de la Terre (atmosphère, océans), qui contribuent de manière significative à l'uniformisation de la température à la surface de la Terre. Mais ce n'est pas ce que l'énoncé semble vouloir discuter.

Q 5. En coordonnées sphériques, un élément infinitésimal de surface s'exprime par $d^2S = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$.

$$S_{\text{int}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi-\alpha} R^2 \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 (1 + \cos(\alpha))$$

La surface émise par l'enceinte est donnée par la loi de Stefan

$$P_{E \rightarrow \text{int}} = S_{\text{int}} \sigma T_T^4 = 2\pi R^2 \sigma (1 + \cos \alpha) T_T^4 \quad .$$

Comme $P_{E \rightarrow O} = \eta P_{E \rightarrow \text{int}}$,

$$P_{E \rightarrow O} = 2\pi r^2 (1 + \cos \alpha) \sigma T_T^4 \quad .$$

Q 6. L'objet rayonne de la même manière dans toutes les directions et la puissance totale qu'il émet est $P_O = 4\pi r^2 \sigma T^4$. Cette puissance atteint toute la sphère de rayon R mais seule une partie concerne l'enceinte.

$$P_{O \rightarrow E} = P_O \frac{S_{\text{in}}}{4\pi R^2} \quad \boxed{P_{P \rightarrow E} = 2\pi r^2 \sigma T^4 (1 + \cos \alpha)} \quad .$$

L'énoncé demande « le flux radiatif entre l'objet et l'enceinte » et cette expression n'est pas très claire. Il faut comprendre qu'il y a un flux dans chaque sens et qu'on doit les soustraire pour avoir un flux global. En orientant positivement de l'enceinte vers l'objet,

$$\Phi_1 = P_{E \rightarrow O} - P_{O \rightarrow E} = 2\pi r^2 (1 + \cos \alpha) (T_T^4 - T^4) \quad ; \text{ on identifie } \boxed{X_1 = 2\pi r^2 (1 + \cos \alpha)} \quad .$$

Q 7. L'objet reçoit $P_{E \rightarrow O}$ et $P_{S \rightarrow O}$; il émet P_O . À l'équilibre, $P_O = P_{E \rightarrow O} + P_{S \rightarrow O}$:

$$4\pi r^2 \sigma T^4 = 2\pi r^2 (1 + \cos \alpha) \sigma T_T^4 + \sigma T_S^4 \pi R^2 \sin^2 \alpha \beta^2$$

$$T = \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} T_T^4 + \frac{R^2 \beta^2 \sin^2 \alpha}{4r^2} T_S^4 \right)^{1/4}$$

Dans la question 2, on a vu $T_T = \sqrt{\beta/2} T_S$ donc

$$T = \frac{\beta^2 T_S^4}{4} \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} + \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \alpha \right) .$$

Q 8.

$$P_{O \rightarrow \text{sys}} = P_O - P_{O \rightarrow E} = P_0 \left(1 - \frac{1 + \cos \alpha}{2} \right) = P_0 \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad \boxed{P_{O \rightarrow \text{sys}} = 2\pi r^2 \sigma T^4 (1 - \cos \alpha)}$$

Par rapport au résultat de Q6, il suffit de changer α en $\pi - \alpha$ pour considérer le trou à la place de l'enceinte.

Q 9. Comme dans la question 6, il s'agit de calculer une différence de flux allant en sens inverses et l'énoncé spécifique l'orientation du Soleil vers l'objet.

$$\Phi_2 = P_{S \rightarrow O} - P_{O \rightarrow S} = P_{S \rightarrow O} - \xi P_{O \rightarrow \text{sys}} = \pi R^3 (\sin^2 \alpha) \beta^2 \sigma T_S^4 - 2\pi r^2 \xi (1 - \cos \alpha) \sigma T^4$$

On identifie $\boxed{X_2 = 2\pi r^2 \xi (1 - \cos \alpha)}$.

Q 10. Pour $T = T_S$, $\Phi_2 = 0$. On en déduit

$$\xi = \frac{\beta^2 R^2 \sin^2 \alpha}{2r^2 (1 - \cos \alpha)} .$$

Q 11. Le coefficient ξ est une fraction du rayonnement du rayonnement traversant le système et cette définition impose $\xi \leq 1$. En utilisant l'expression de ξ trouvée dans la question précédente, on en déduit l'inégalité

$$r \geq r_{\min} \quad \text{avec} \quad \boxed{r_{\min} = \beta R \sqrt{f(\alpha)}} .$$

La valeur minimale de r dépend de α et comme l'énoncé nous renseigne sur les variations de f , on devine qu'il faut discuter cet aspect, mais cela n'est pas très clair.

— La limite thermodynamique qui s'impose à r si toutes les valeurs de α sont envisagées est obtenue en prenant le maximum de f , c'est à dire $f(0) = 1$. Dans ce cas, on conclut à l'inégalité

$$r \geq \beta R .$$

— Si on cherche la plus petite valeur de r autorisée, quitte à fixer α à la valeur optimale $\pi/2$, on conclut à l'inégalité

$$r \geq \frac{\beta R}{\sqrt{2}} .$$

Q 12.

$$C = \frac{R^2 \sin^2 \alpha}{r^2} .$$

D'après la seconde option de la question précédente, $r \geq \beta R / \sqrt{2}$ donc

$$C \leq \frac{R^2 \sin^2 \alpha}{\beta^2 R^2 \times 2} \quad \boxed{C \leq \frac{\sin^2 \alpha}{2\beta^2}} .$$

C'est la réponse attendue par l'énoncé, mais elle me paraît incorrecte car dans l'inégalité portant sur r a été établie dans la question précédente en fixant $\alpha = \pi/2$ de sorte que cela n'a plus de sens de conserver la dépendance en $\sin^2 \alpha$!

Si je on adopte la première option de la question précédente $r \geq \beta R$, on obtient

$$C \leq \frac{\sin^2 \alpha}{\beta^2} .$$

C'est en accord avec ce qu'on lit après la question 13.

Pour être rigoureux, je crois qu'il faudrait revenir à la question 10, exprimer r en fonction de ξ , le reporter dans l'expression de C puis en déduire la majoration de C .

Q 13. Je continue avec $C \leq 2 \sin^2 \alpha / \beta^2$. Le résultat de Q7 s'écrit

$$T^4 = \frac{\beta^2 T_s^4}{4} \left[\frac{1 + \cos \alpha}{2} + C \right] .$$

On néglige le terme en $(1 + \cos \alpha)$ issu de T_T et on majore $\beta^2 C$ par $2 \sin 2\alpha$. Alors

$$T^4 \leq \frac{T_s^4 \sin^2 \alpha}{2} .$$

Le majorant est maximal pour $\alpha = \pi/2$ et on obtient dans ce cas

$$T \leq \frac{T_s}{2^{1/4}} = 0,84 T_s .$$

Le rôle de la variable α dans ce problème me paraît très confus !