PC* — mathématiques **jeudi 5 décembre 2024**
Devoir surveillé n^o 4 — piste bleue **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Problème 1

On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont tous les termes sont strictement positifs.
On considère également la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $a_n = u_n v_n$.

Pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par

$$(\mathrm{A}_n)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ -v_i & \text{si} \quad j = i+1 \\ u_i & \text{si} \quad i = j+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, la matrice A_3 s'écrit

$$\mathrm{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -v_1 & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & -v_3 \\ 0 & 0 & u_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$, on note Δ_n le déterminant de la matrice A_n.

Question 1. Calculer Δ_1 et Δ_2.

Question 2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, montrer la relation

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}.$$

Question 3. Montrer que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Question 4. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer la majoration

$$\Delta_n \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k).$$

On raisonnera par récurrence.

Question 5. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{P}_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + a_k).$$

Dans cette question, on suppose que la série $\sum a_k$ est convergente.

5.1. Montrer que la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

5.2. Que peut-on en déduire pour la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Question 6. On suppose maintenant que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$.

6.1. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer l'inégalité $\Delta_n \geqslant 1$.

6.2. Étudier la nature de la série $\sum t_n$.

6.3. Prouver alors que la série $\sum a_n$ converge.

Question 7. Quel résultat a-t-on finalement établi ?

Problème 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on pose $f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$.

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ défini par

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad g(\mathrm{X}^k) = \mathrm{X}^{n-k}.$$

Enfin, on note $\mathcal{B}$ la base canonique $(1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Question 8. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Question 9. Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et que $g^{-1} = g$.

On pose alors $h = g^{-1} \circ f \circ g$ et $u = h + f$.

Question 10. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $h(\mathrm{X}^k)$.

Question 11. Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, justifier l'égalité

$$u(\mathrm{P}) = n\mathrm{X}\mathrm{P} - (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}'.$$

Question 12. Trouver la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $\mathrm{P}_k = (\mathrm{X} - 1)^k (\mathrm{X} + 1)^{n-k}$.

Question 13. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $u(\mathrm{P}_k)$.

Question 14. En déduire que la famille $\mathcal{C} = (\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Question 15. Écrire la matrice de u relativement à la base $\mathcal{C}$. Comment qualifier l'endomorphisme u ?

Question 16. Calculer $\mathrm{dét}(u)$.

Problème 3

On se donne un espace vectoriel réel E de dimension finie. On note n sa dimension.

On considère un endomorphisme f de E et on suppose que E est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que f^k soit l'endomorphisme nul de E. On note p l'indice de nilpotence de f, c'est-à-dire le plus petit des entiers k pour lesquels f^k est l'endomorphisme nul de E.

Question 17. Prouver les inégalités suivantes

$$0 \leqslant \mathrm{rg}(f^{p-1}) \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{rg}(f^2) \leqslant \mathrm{rg}(f) \leqslant n.$$

Question 18. Pour tout entier naturel k, prouver l'égalité $\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f^k)) = \mathrm{rg}(f^k) - \mathrm{rg}(f^{k+1})$ et en déduire que la suite de terme général $\mathrm{rg}(f^k) - \mathrm{rg}(f^{k+1})$ est décroissante.

On pourra considérer la restriction de f à $\mathrm{Im}(f^k)$.

Question 19. En déduire que les inégalités écrites à la première question sont strictes.

Pour tout le reste de l'exercice, on suppose que n vaut 5 et que p vaut 3.

Question 20. Montrer que le rang de f^2 vaut 1 et que le rang de f vaut 2 ou 3.

Question 21. Dans cette question, on suppose que le rang de f vaut 2.

21.1. Montrer qu'il existe des vecteurs e_3, e_4, e_5 de E tels que la famille $(f^2(e_3), e_4, e_5)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

21.2. On pose $e_2 = f(e_3)$ et $e_1 = f(e_2)$.
Montrer que la famille $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est une base de E et donner la matrice de f dans cette base.

Question 22. Dans cette question, on suppose que le rang de f vaut 3.

22.1. Calculer $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f))$ et $\dim(\mathrm{Im}(f^2) \cap \mathrm{Ker}(f))$.

22.2. En déduire les inclusions $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.

22.3. On choisit un vecteur e_3 de E qui n'appartient pas $\mathrm{Ker}(f^2)$. On pose ensuite $e_2 = f(e_3)$ et $e_1 = f(e_2)$.
Montrer l'existence d'un vecteur e_5 de E tel que le couple $(e_1, f(e_5))$ soit une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
On pose alors $e_4 = f(e_5)$.

22.4. Montrer finalement que la famille $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est une base de E et donner la matrice représentative de f dans cette base.
