PC* — mathématiques **jeudi 5 décembre 2024**
Devoir surveillé n° 4 — piste rouge **durée : 4 heures**

On fixe un entier n supérieur ou égal à 1. On considère un espace vectoriel complexe E de dimension n.

Définition 1. Une application u de E dans E est *semi-linéaire* si et seulement si elle possède la propriété suivante

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \qquad \forall a \in \mathbb{C}, \qquad u(ax + y) = \overline{a}u(x) + u(y). \tag{1}$$

Définition 2. Un nombre complexe μ est une *valeur co-propre* de l'application semi-linéaire u si et seulement si il existe un vecteur x non nul de E vérifiant la relation suivante

$$u(x) = \mu x. \tag{2}$$

En cas d'existence, un tel vecteur x est un *vecteur co-propre* de u associé à la valeur co-propre μ.

Définition 3. Étant donné une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, un nombre complexe μ et un vecteur-colonne X de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, le vecteur X est un *vecteur co-propre* de A associé à la *valeur co-propre* μ si et seulement si le vecteur X est non nul et vérifie la relation matricielle ci-dessous

$$\mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{X}} = \mu \mathrm{X}. \tag{3}$$

Il s'entend que pour toute matrice complexe M, la notation $\overline{\mathrm{M}}$ désigne sa matrice conjuguée, obtenue à partir de M en remplaçant chaque coefficient par son conjugué.

Définition 4. Considérons une base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ de l'espace vectoriel E.

Pour tout vecteur x de E, on note classiquement $\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(x)$ le vecteur colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui représente le vecteur x dans la base $\mathcal{E}$.

Pour toute application semi-linéaire u de E dans E, on note $\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(u)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont les colonnes sont les vecteurs colonnes $\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(u(e_1)), \ldots, \mathrm{M}_{\mathcal{E}}(u(e_n))$ dans cet ordre.

On admet réciproquement que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ représente une unique application semi-linéaire de E dans E.

Bien que cette définition soit formellement la même que la définition de la matrice représentative d'un endomorphisme, on ne perdra pas de vue le fait que u n'est pas un endomorphisme de E et que les règles de calcul valables pour les matrices représentatives d'endomorphismes ne peuvent *a priori* pas être appliquées aux matrices représentatives d'applications semi-linéaires.

Première partie

I.1. Premières propriétés

Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E.

a. Montrer que pour tout vecteur x non nul de l'espace vectoriel E, il existe au plus un nombre complexe μ tel que la relation $u(x) = \mu x$ ait lieu.

b. Montrer que si le nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u, alors, pour tout θ réel, le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est aussi une valeur co-propre de u.

Étant donné un vecteur co-propre x de l'application semi-linéaire u associé à la valeur co-propre μ, trouver en fonction de x un vecteur co-propre de u associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$.

c. Étant donné une valeur co-propre μ de l'application semi-linéaire u, on note $\mathrm{E}_\mu(u)$ l'ensemble des vecteurs x de l'espace vectoriel E qui vérifient la relation $u(x) = \mu x$. En formule :

$$\mathrm{E}_\mu(u) = \{x \in \mathrm{E} \mid u(x) = \mu x\}. \tag{4}$$

L'ensemble E_μ est-il un espace vectoriel complexe ? réel ?

d. Étant donné deux applications semi-linéaires u et v de E, montrer que la composée $u \circ v$ est un endomorphisme de E.

I.2. Matrices associées à une application semi-linéaire

a. Soit u une application semi-linéaire de E dans E. On note $\mathrm{A} = \mathrm{M}_{\mathcal{E}}(u)$.

Pour tout vecteur x de E, montrer que la matrice-colonne qui représente le vecteur $u(x)$ dans la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E vaut $\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{X}}$.

b. On considère deux bases $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E. On associe à une même application semi-linéaire u de E deux matrices A et B, relativement aux bases $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ respectivement. On note S la matrice qui représente la base $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Montrer la relation $\mathrm{B} = \mathrm{S}^{-1}\cdot\mathrm{A}\cdot(\overline{\mathrm{S}})$.

c. Montrer que la matrice $\mathrm{A} = \mathrm{M}_{\mathcal{E}}(u)$ est diagonale si et seulement si la base $\mathcal{E}$ est constituée de vecteurs co-propres de l'application semi-linéaire u.

d. Montrer que les valeurs co-propres de l'application semi-linéaire u sont les valeurs co-propres de la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(u)$.

e. Soient μ dans $\mathbb{C}$ et A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que le nombre complexe μ est une valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre complexe $|\mu|$ est valeur co-propre de la matrice A.

I.3. Exemples

a. On introduit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

Rechercher les valeurs co-propres de A et les vecteurs co-propres qui leur sont associés.

b. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A admet au moins une valeur propre réelle λ.

Montrer que la matrice A possède au moins une valeur co-propre.

I.4. Lien entre les valeurs co-propres de la matrice A et les valeurs propres de la matrice $\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{A}}$

On se donne une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Montrer que si le nombre complexe μ est une valeur co-propre de la matrice A, alors le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{A}}$.

b. On considère un élément λ de $[0, +\infty[$ et on suppose que λ est une valeur propre de la matrice $\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{A}}$. On note X un vecteur propre de $\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{A}}$ associé à la valeur propre λ :

$$\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{X} = \lambda\mathrm{X}. \tag{5}$$

Montrer que le nombre réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A. On pourra pour cela introduire le vecteur colonne $\mathrm{Y} = \mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{X}} + \sqrt{\lambda}\mathrm{X}$.

c. En déduire que pour qu'un nombre réel positif μ soit une valeur co-propre de la matrice A, il faut et il suffit que μ^2 soit une valeur propre de la matrice $\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{A}}$.

d. Montrer qu'un nombre complexe μ est une valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{A}}$.

e. Pour tout m réel, on introduit la matrice A_m définie ci-dessous

$$\mathrm{A}_m = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Déterminer les valeurs co-propres réelles positives de la matrice A_m. On discutera selon les valeurs de m.

I.5. Cas d'une matrice triangulaire supérieure

Dans cette question, on suppose que la matrice A est triangulaire supérieure.

a. On se donne une valeur propre λ de la matrice A.

Montrer que pour tout θ réel, le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A.

b. Soit μ un nombre complexe. On suppose que μ est une valeur co-propre de la matrice A.

Montrer l'existence d'un nombre réel θ tel que le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ soit une valeur propre de la matrice A.

c. On considère la matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ définie ci-dessous

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Montrer que la matrice A admet 1 pour valeur co-propre et déterminer un vecteur copropre qui lui est associé.

Seconde partie

Définition 5. Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont *co-semblables* si et seulement si il existe une matrice S de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ inversible vérifiant la relation suivante

$$\mathrm{B} = \mathrm{S} \cdot \mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{S}}^{-1}. \tag{8}$$

Définition 6. Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est *co-diagonalisable* si et seulement si elle est co-semblable à une matrice diagonale.

Le but de cette partie est de trouver des conditions de co-diagonalisabilité pour les matrices carrées complexes.

II.1. Une relation transitive

Soient trois matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A et B sont co-semblables et que B et C sont co-semblables.

Montrer que les matrices A et C sont co-semblables.

II.2. Indépendance des vecteurs co-propres

On considère une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et un entier k compris entre 1 et n. On suppose qu'on connaît des vecteurs co-propres $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_k$ de la matrice A associés respectivement à des valeurs co-propres $\mu_1, \ldots, \mu_k$.

a. Montrer que si les valeurs co-propres $\mu_1, \ldots, \mu_k$ ont des modules deux à deux distincts, alors la famille $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_k)$ est libre.

b. En déduire que si la matrice $\mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{A}}$ possède des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réelles, positives et deux à deux distinctes, alors la matrice A est co-diagonalisable. On pourra se référer aux résultats des questions **1.2.b** et **1.2.c**.

II.3. Quelques propriétés

a. Soit S une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On pose

$$\mathrm{A} = \mathrm{S} \cdot (\overline{\mathrm{S}})^{-1}. \tag{9}$$

Calculer la matrice produit $\mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{A}}$.

b. On considère une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et on suppose qu'elle vérifie la relation qui suit

$$\mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{I}_n. \tag{10}$$

Montrer qu'il existe au moins une valeur réelle de θ pour laquelle la matrice $\mathrm{S}(\theta)$ définie par la relation

$$\mathrm{S}(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{A} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n \tag{11}$$

soit inversible.

Pour une telle valeur de θ, calculer la matrice $\mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{S}(\theta)}$ et en déduire la valeur du produit $\mathrm{S}(\theta) \cdot (\overline{\mathrm{S}(\theta)})^{-1}$.

c. Caractériser les matrices co-semblables à la matrice I_n.

II.4. Une condition nécessaire

Soit A une matrice $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, que l'on suppose co-diagonalisable. On considère alors une matrice S inversible telle que la matrice $\mathrm{S}^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{S}}$ soit diagonale.

Montrer que la matrice $\mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{A}}$ est diagonalisable, que ses valeurs propres sont réelles positives et que le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $\mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{A}}$.

II.5. Exemples

On considère les matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? sont-elles co-diagonalisables ?