CALCUL DE LA FONCTION DE TRANSFERT DU FILTRE DE RAUCH

On calcule la fonction de transfert du montage de la figure 1 dans lequel l'amplificateur opérationnel supposé idéal fonctionne en régime linéaire.

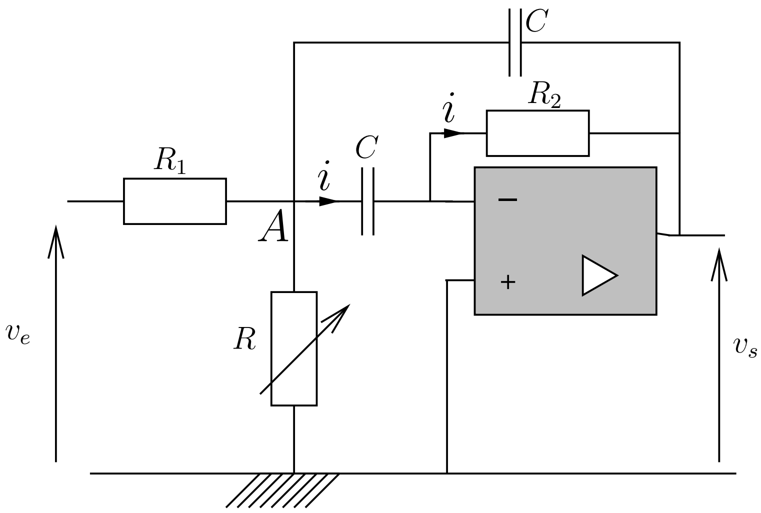

FIGURE 1: Amplificateur sélectif de Rauch. C = 10 nF, $R_2 = 1\,\mathrm{M}\Omega$, $R_1 = 100\,k\Omega$, R est une boite à décades initialement réglée sur $R = 1\,\mathrm{k}\Omega$.

L'entrée + est à la masse et comme le régime est linéaire, $v_- = v_+ = 0$. La ddp aux bornes du condensateur connecté à l'entrée inverseuse est donc v_A et l'intensité du courant traversant ce condensateur est $i = jC\omega v_A$. Cette intensité traverse aussi R_2 et la loi d'Ohm s'écrit $v_s = -R_2 i = -R_2 jC\omega v_A$.

Pour exprimer v_A, écrivons la loi de nœuds en termes de potentiels, c'est à dire que la somme des intensité arrivant en A est nulle.

$$\frac{v_e - v_A}{R_1} + \frac{0 - v_A}{R} + jC\omega(v_s - v_A) + jC\omega(v_- - v_A) = 0 \qquad v_A = \frac{\frac{v_e}{R_1} + jC\omega v_s}{\frac{1}{R'} + 2jC\omega} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

En éliminant v_A, on obtient

$$\begin{aligned}
v_s &= -R_2 jC\omega \frac{\frac{v_e}{R_1} + jC\omega v_s}{\frac{1}{R'} + 2jC\omega} \\
v_s\left(\frac{1}{R'} + 2jC\omega\right) &= -jC\omega\frac{R_2}{R_1}v_e - R_2(jC\omega)^2 v_s \\
v_s\left(\frac{1}{R'} + 2jC\omega + R_2(jC\omega)^2\right) &= -\frac{R_2}{R_1}jC\omega v_e \\
\frac{v_s}{v_e} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}jC\omega}{\frac{1}{R'} + 2jC\omega + R_2(jC\omega)^2} &= -\frac{R_2}{2R_1}\,\frac{1}{\frac{1}{2R'jC\omega} + 1 + \frac{R_2}{2}jC\omega} \quad .
\end{aligned}$$

La pulsation propre est celle qui annule les termes imaginaires du dénominateur. Elle est telle que

$$-\frac{1}{R'C\omega_0} + R_2C\omega_0 = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R'R_2C}}} \quad .$$

Ensuite, on pose $\omega = x\omega_0 = x/(\sqrt{R'R_2}C)$ et on réécrit

$$\frac{v_s}{v_e} = -\frac{R_2}{2R_1}\,\frac{1}{1+\frac{1}{2}j\left(R_2C\frac{x}{\sqrt{R'R_2}C}-\frac{\sqrt{R'R_2}C}{R'Cx}\right)} = \frac{H_0}{1+\frac{j}{2}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R'}}x-\sqrt{\frac{R_2}{R'}}\frac{1}{x}\right)}$$

$$\boxed{\frac{v_s}{v_e} = \frac{H_0}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{H_0 = -\frac{R_2}{2R_1} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R'}}}\quad .$$