Chapitre 10 — séries de fonctions

1 Convergence simple

Séries de fonctions. Sommes partielles.
Convergence simple (c'est la convergence simple de la suite des sommes partielles). Somme et restes.
Liens avec la convergence simple des suites de fonctions, notamment via la série des différences.
Exemples fournis par les séries de référence (séries géométriques, série exponentielle, séries de Riemann et fonction ζ).
Exemples fournis par le théorème des séries alternés.

2 Convergence uniforme et convergence normale

2.1 Convergence uniforme

Définition (convergence uniforme de la suite des sommes partielles). La convergence uniforme implique la convergence simple.
Caractérisation : la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I si et seulement elle converge simplement sur I et la suite de ses restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle.
Exemples et contre-exemples. Liens avec les suites de fonctions. Utilisation du théorème des séries alternées.

2.2 Convergence normale

Définition. Exemples et contre-exemples.

2.3 Lien entre ces modes de convergence

La convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ implique la convergence simple de la série de fonctions $\sum |u_n|$ ainsi que la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$.
Exemples et contre-exemple de la réciproque (avec une série alternée).

3 Théorèmes sur les séries de fonctions

3.1 Théorème de continuité

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Hypothèses :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur l'intervalle I ;
- la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur l'intervalle I.

Conclusion : la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est définie et continue sur l'intervalle I.

Cas où la convergence uniforme n'a lieu que sur les segments.

Variante : théorème de la double limite.

3.2 Théorème d'intégration terme à terme sur un segment

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur le segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Hypothèses :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le segment $[a, b]$;
- la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur le segment $[a, b]$.

Conclusion : la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t$ converge et sa somme est donnée par

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)\ \mathrm{d}t\right).$$

3.3 Théorème de dérivation terme à terme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Hypothèses :

- pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I ;
- la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n'$ converge uniformément sur I.

Conclusion : la fonction $x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est la fonction $x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n'(x)$.

Cas où la convergence uniforme n'a lieu que sur les segments.

Version $\mathcal{C}^k$.

4 Un exemple de référence : la fonction zêta de Riemann

On étudie la fonction $\zeta : x\mapsto\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x}$.

On prouve notamment qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.

On met en pratique la méthode des rectangles pour obtenir des encadrements de $\zeta(\alpha)$.

5 Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque

Soit $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout entier $n\geqslant n_0$, la fonction f_n est intégrable sur l'intervalle I.
2. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$ converge simplement sur l'intervalle I.
3. La somme de cette série de fonctions, notée f, est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I.
4. La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0}\int_{\mathrm{I}}|f_n(t)|\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Conclusion : la fonction f est intégrable sur l'intervalle I et son intégrale est donnée par

$$\int_{\mathrm{I}}\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty}f_n(t)\right)\ \mathrm{d}t=\sum_{n=n_0}^{+\infty}\int_{\mathrm{I}}f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exemples : égalité $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}\ \mathrm{d}t=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et divergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$.

Programme de colles n° 7 (du lundi 6 au vendredi 17 janvier 2025)

Tout ce chapitre.
