

Exercice 1. (*) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-n^2x}}{n^2+1}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Montrer qu'elle a une limite finie en $+\infty$.

Exercice 2. (*) Pour tout x réel et tout entier n strictement positif, on pose $f_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x^2}{k^2}\right)$.

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers une fonction f continue. Pour cela, on se ramènera à l'étude d'une série de fonctions.

Exercice 3. (*) Pour tout n dans \mathbb{N}^* et tout x dans $[0, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

a. Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On note f la somme de cette série de fonctions.

b. Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$? sur les segments inclus dans $[0, +\infty[$?

c. Converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$? sur les segments inclus dans $[0, +\infty[$?

d. La fonction f est-elle continue sur $[0, +\infty[$? est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?

Exercice 4. ()** On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}.$$

a. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b. Prouver la relation

$$f(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

quand x tend vers $+\infty$.

c. À l'aide d'un encadrement par des intégrales, trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 5. ()** On pose

$$f_n(x) = \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}.$$

a. Montrer que la fonction f est définie et continue sur \mathbb{R} .

b. Trouver la limite de f en $+\infty$.

c. Montrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

d. On se propose de prouver que la fonction f n'est pas dérivable en 0. On raisonne par l'absurde en supposant que f est dérivable en 0.

Prenons N dans \mathbb{N}^* . Pour tout $x > 0$, prouver l'inégalité

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \sum_{n=1}^N \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x}.$$

Qu'obtient-on en faisant tendre x vers 0 par valeurs strictement positives? Conclure.

e. Trouver un équivalent de $f'(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Prouver que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. Sa somme est notée f .
2. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Prouver que f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et exprimer son intégrale sous la forme d'une somme de série.
4. La fonction f est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?
5. Vérifier que f est décroissante sur $]0, +\infty[$. Que dire de ses limites aux bornes ?
6. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 7. (*) Pour tout (n, p) de \mathbb{N}^2 , on pose $I(n, p) = \int_0^1 t^n (\ln(t))^p dt$.

- a. Montrer que ces intégrales existent.
- b. Pour tout n dans \mathbb{N} et tout p dans \mathbb{N}^* , trouver une relation entre $I(n, p)$ et $I(n, p - 1)$.
- c. En déduire une expression explicite de $I(n, p)$.

d. Prouver l'égalité
$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

e. Prouver l'égalité
$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}.$$

Exercice 8. ()** Prouver l'égalité
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{ch}(x)} dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 9. ()** Soit $t \in \mathbb{R}$. On veut prouver l'égalité
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tu)}{e^u - 1} du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t}{t^2 + n^2}.$$

- a. **Première méthode.** Passer par les sommes partielles avec le théorème de convergence dominée.
- b. **Deuxième méthode.** Appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Sous l'hypothèse $t > 0$, on écrira

$$\int_0^{+\infty} |\sin(tu)| e^{-ku} du = \int_0^{\pi/t} |\sin(tu)| e^{-ku} du + \int_{\pi/t}^{+\infty} |\sin(tu)| e^{-ku} du.$$

et on majorera $|\sin(tu)|$ par 1 ou $|tu|$ selon ce qui est le plus pertinent.

Exercice 10. ()** On considère une série $\sum_{n \geq 0} a_n$ absolument convergente et on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

- a. Montrer que S est définie sur \mathbb{R} .
- b. Prouver l'égalité

$$\int_0^{+\infty} S(x) e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$