

## Houlogénérateur

13.  $R'$  est en translation dans  $R$ . Son origine  $G$  présente dans  $R$  une accélération  $\ddot{Y} \bar{e}_y + \ddot{Z} \bar{e}_z$   
donc  $\vec{F}_{ie} = -m (\ddot{Y} \bar{e}_y + \ddot{Z} \bar{e}_z)$

14. Le moment du poids en  $A$  vaut  $-mgl \sin \alpha$ .  
Celui de  $\vec{F}_{ie}$  est donné par :

$$\Gamma_{A_g}(\vec{F}_{ie}) = (\vec{AB} \wedge \vec{F}_{ie}) \cdot \bar{e}_x$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{F}_{ie} = \begin{pmatrix} 0 \\ l \sin \alpha \\ -l \cos \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -m \ddot{Y} \\ -m \ddot{Z} \end{pmatrix} = -ml (\ddot{Z} \sin \alpha + \ddot{Y} \cos \alpha)$$

Le pendule possède par rapport à  $(G_x)$  un moment cinétique  $\Gamma_{G_x} = ml^2 \dot{\alpha}$

TMC :  $ml^2 \ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha - \beta \dot{\alpha} - ml (\ddot{Z} \sin \alpha + \ddot{Y} \cos \alpha)$

$$\ddot{\alpha} + \frac{\beta}{ml^2} \dot{\alpha} + \underbrace{\frac{g}{l} \sin \alpha + \frac{\ddot{Z}}{l} \sin \alpha + \frac{\ddot{Y}}{l} \cos \alpha}_{s(\alpha)} = 0$$

$$\chi = \frac{\beta}{ml^2}$$

15.  $E_c = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\alpha}^2$

Énergie pot de pesanteur :  $E_{Pg} = -mgl \cos \alpha$

~~La force d'inertie  $-ma_{e_y} \bar{u}_y - ma_{e_z} \bar{u}_z$ , avec  $a_{e_y}$  et  $a_{e_z}$  uniforme, dérive de l'énergie pot~~

Le théorème de la puissance cinétique s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (E_c + E_p) = P_{NC} = P(\vec{F}_{ie}) + P(\Gamma) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} P(\vec{F}_{ie}) &= \vec{F}_{ie} \cdot \vec{v} = -m(\ddot{Y}\bar{u}_y + \ddot{Z}\bar{u}_z) \cdot l\dot{\alpha}\bar{u}_\alpha \\ &= -ml\dot{\alpha}(\ddot{Y}\cos\alpha + \ddot{Z}\sin\alpha) \end{aligned}$$

$$P(\Gamma) = -\beta\dot{\alpha}\dot{\alpha} = -\beta\dot{\alpha}^2$$

$$(1) : ml^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + mgl\dot{\alpha}\sin\alpha = -ml\dot{\alpha}(\ddot{Y}\cos\alpha + \ddot{Z}\sin\alpha) - \beta\dot{\alpha}^2$$

$$\text{d'où} \quad \ddot{\alpha} + \frac{\beta}{ml^2}\dot{\alpha} + \frac{g\sin\alpha + \ddot{Z}\sin\alpha + \ddot{Y}\cos\alpha}{l} = 0$$

16. Avec les approximations proposées,  $\cos\alpha \approx 1$ ,  $\sin\alpha \approx \alpha$

$$\text{et } \ddot{Z} + g \approx g, \text{ donc } \ddot{\alpha} + \lambda\dot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = -\frac{1}{l}\ddot{Y}$$

$$\text{ou } \ddot{\alpha} + \lambda\dot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = \frac{a\omega^2}{l}\cos\omega t$$

- le régime transitoire correspond à l'équation homogène

associée d'équation caractéristique  $r^2 + \lambda r + \frac{g}{l} = 0$

$$\Delta = \lambda^2 - 4\frac{g}{l} = -12,7 \text{ m s}^{-2} \quad r = -\frac{\lambda}{2} \pm i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

$$\text{Notons } \Omega_t = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau = \frac{2}{\lambda} \quad \tau = 0,76 \text{ s}}$$

La solution de l'éq. homogène est :

$$\alpha = K e^{-\frac{\lambda}{2}t} \cos(\Omega_t t + \varphi)$$

$$\boxed{T_t = \frac{2\pi}{\Omega_t} = 3,5 \text{ s}}$$

Une solution particulière s'obtient en notation complexe.  $\underline{a} = \text{Re}(\underline{x})$   $\underline{x} = A_{\text{MAX}} e^{j(\omega t + \theta)}$

$$-\omega^2 \underline{A}_{\text{MAX}} + j\omega \chi \underline{A}_{\text{MAX}} + \frac{g}{l} \underline{A}_{\text{MAX}} = \frac{a\omega^2}{l}$$

$$|\underline{A}|_{\text{MAX}} = \frac{a\omega^2/l}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\chi}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$A_{\text{MAX}} = |\underline{A}_{\text{MAX}}| = \frac{a\omega^2/l}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\chi^2}}$$

Finalement,  $\underline{x}$  est de la forme

$$\underline{x} = \underbrace{A_0 e^{-\frac{\chi}{2}t}}_{\text{régime transitoire}} \cos(\Omega t + \varphi) + A_{\text{MAX}} \cos(\omega t + \psi)$$

régime transitoire qui disparaît après quelques fois  $\tau$ .

$$\tau = \frac{2}{\chi}$$

17. Le régime permanent s'établit après quelques secondes, c'est à dire après quelques fois  $\tau$ .

On observe que l'amplitude croît avec  $a$  comme prévu dans la question 16, mais sans lui

être proportionnelle. Pour  $a = 6 \text{ m}$  et  $l = 2 \text{ m}$ ,

l'oscillation n'est plus sinusoïdale et les approximations de 16. sont mises en défaut.

On voit aussi que  $\tau \uparrow$  si  $l \uparrow$ , en accord avec  $\tau = 2/\chi = 2ml^2/\beta$ .

18. La conversion en énergie électrique est décrite par le couple  $-\beta \dot{\alpha}$ . La puissance associée est  $-\beta \dot{\alpha}^2$

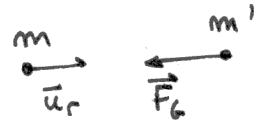
$$\langle P_e \rangle = \beta \langle \dot{\alpha}^2 \rangle$$

On observe un maximum pour  $l \approx 8 \text{ m}$ . Pour cette valeur,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = 1,1 \text{ rads}^{-1}$  et  $T_0 = 5,7 \text{ s}$ .

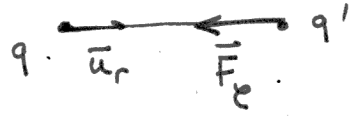
Le maximum s'interprète donc comme une résonance provoquée par une fréquence d'excitation voisine de la fréquence propre du pendule. Le petit écart entre les deux fréquences peut s'expliquer par l'influence du frottement en  $-\beta \dot{\alpha}$ .

# Véhicule de transfert automatique

IA 1.  $\vec{F}_G = -G \frac{m m'}{r^2} \vec{u}_r$



$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r^2} \vec{u}_r$

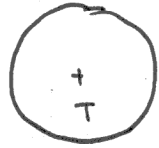


Ces forces s'exercent sur  $m'$  ou  $q'$ .

$m$  et  $q$  sont soumis aux forces opposées.

IA 2.  $\oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$

IA 3. Par symétrie,  $\vec{A}(\vec{r}) = A(r) \vec{u}_r$



Le th de Gauss appliqué à une sphère

donne  $4\pi r^2 A(r) = -4\pi G M_T$   $A(r) = -\frac{G M_T}{r^2}$

À la surface de la Terre,  $|A(r)| = g_0 = \frac{G M_T}{R_T^2}$  donc

$G M_T = g_0 R_T^2$   $A(r) = -g_0 \frac{R_T^2}{r^2}$   $k = G M_T = g_0 R_T^2$

IB 1. On étudie le mouvement du mobile dans le référentiel

géocentrique galiléen. Sur une tj circulaire, son accélération

s'écrit  $\vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$  et le pfd donne:

$m \vec{a} = m \vec{A}$  soit  $\vec{a} = \vec{A}$ . Sur  $\vec{u}_\theta$ :  $0 = r \ddot{\theta}$  donc

$\dot{\theta} = \text{cte}$ . La vitesse  $r \dot{\theta}$  est constante

IB 2 projeté du pfd sur  $\vec{u}_r$ :  $-r \dot{\theta}^2 = A = -\frac{G M_T}{r^2}$

d'où  $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{G M_T}{r^3}} = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{r^3}}$  et  $v = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{r}}$

$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{k}{r^3}}$   $v = \sqrt{\frac{k}{r}}$

2

IB3 La période de rotation est  $T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\dot{\theta}^2} = \frac{4\pi^2}{k/r^3} \quad \text{donc} \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{k}$$

IB4 On peut obtenir  $E_p$  par  $\vec{F} = -\text{grad} E_p$  ou par  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -dE_p$ .

$$E_p = -\frac{mk}{r}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \frac{k}{r} \quad E_c = -\frac{E_p}{2}$$

IB5  $E_m = E_c + E_p = -\frac{mk}{2r}$

IB6

$$\omega_s = \dot{\theta} = 1,13 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$r_s = R_T + d_s = 6770 \text{ km}$$

$$v_s = 7,67 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = 5,55 \cdot 10^3 = 1 \text{ h } 32 \text{ min}$$

II A.1

$$\Delta\psi = \frac{L_0 - L_1}{r_s - h} = \frac{270}{6760}$$

$$\Delta\psi = 3,99 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

II A 2

$$\omega_{ATV} = \sqrt{\frac{k}{(r_s - h)^3}} = \sqrt{\frac{k}{r_s^3 \left(1 - \frac{h}{r_s}\right)^3}}$$

$$\omega_{ATV} = \omega_s \left(1 - \frac{h}{r_s}\right)^{-3/2}$$

$$\approx \omega_s + \frac{3}{2} \frac{h\omega_s}{r_s}$$

$$\Delta\omega = \omega_{ATV} - \omega_s = \frac{3}{2} \frac{h\omega_s}{r_s}$$

II A 3  $\Delta t_{01} = \frac{\Delta \Psi}{\Delta \omega} = 16,0 \cdot 10^3 \text{ s} = 4 \text{ h } 26'$

II B 1 Ce référentiel en rotation autour de l'axe fixe ( $T_g$ ) n'est pas galiléen.

II B 2 L'ATV est soumis à la force de gravitation exercée par la Terre, à la force d'inertie d'entraînement et à la force d'inertie de Coriolis.

II B 3 Comme  $R'$  est en rotation autour de  $(T, \vec{u}_y)$  par rapport à  $R_{\text{Géo}}$ , l'accélération d'entraînement s'exprime par  $\vec{a}_e = \vec{\omega}_s \wedge (\vec{\omega}_s \wedge \vec{HM})$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega}_s \wedge (\vec{\omega}_s \wedge (\vec{TO} + \vec{OM}))$$

↘ égal à  $\vec{\omega} \wedge \vec{TM}$

$$= \omega_s \vec{u}_y \wedge (\omega_s \vec{u}_y \wedge (TO \vec{u}_z)) + \vec{\omega}_s \wedge (\vec{\omega}_s \wedge \vec{OM})$$

$$= -\omega_s^2 TO \vec{u}_z + \vec{\omega}_s \wedge (\vec{\omega}_s \wedge \vec{OM})$$

avec  $\omega_s^2 = \frac{k}{TO^3}$ , on obtient  $\vec{a}_e = -k \frac{\vec{TO}}{TO^3} + \vec{\omega}_s \wedge (\vec{\omega}_s \wedge \vec{OM})$

II B 4  $\vec{TM} = \vec{TO} + \vec{OM} = R \vec{u}_z + \vec{OM}$

$$TM^2 = R^2 + OM^2 + 2R \vec{u}_z \cdot \vec{OM} \quad \underline{R = r_s}$$

$$TM^{-3} = (R^2 + OM^2 + 2R \vec{u}_z \cdot \vec{OM})^{-3/2}$$

$$= R^{-3} \left( 1 + \frac{OM^2}{R^2} + 2 \vec{u}_z \cdot \frac{\vec{OM}}{R} \right)^{-3/2}$$

ordre 2

$$TM^{-3} \approx R^{-3} \left( 1 - \frac{3 \vec{u}_z \cdot \vec{OM}}{R} \right) = R^{-3} \left( 1 - \frac{3z}{R} \right)$$

4

$$\frac{\vec{T}M}{TM^3} = (R \vec{u}_z + \vec{OM}) \frac{1}{R^3} \left(1 - \frac{3z}{R}\right)$$

en développant, on néglige  $\frac{1}{R^3} \times \frac{3z \vec{OM}}{R^2}$  qui est d'ordre 2.

$$\frac{\vec{T}M}{TM^3} \approx \frac{1}{R^2} \vec{u}_z + \frac{\vec{OM}}{R^3} - \frac{3z}{R^3} \vec{u}_z$$

$$\approx \frac{\vec{T}O}{TO^3} + \frac{x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z}{R^3} - \frac{3z}{R^3} \vec{u}_z$$

$$\boxed{\frac{\vec{T}M}{TM^3} - \frac{\vec{T}O}{TO^3} \approx \frac{x \vec{u}_x + y \vec{u}_y - 2z \vec{u}_z}{R^3}}$$

En vue de la question suivante, calculons  $\vec{F}_e + \vec{F}_g$  :

$$\vec{F}_e + \vec{F}_g = -m \vec{a}_e + m \vec{A}$$

$$= m k \frac{\vec{T}O}{TO^3} - m \vec{\omega}_s \wedge (\vec{\omega}_s \wedge \vec{OM}) - m k \frac{\vec{T}M}{TM^3}$$

$$= m k \left( \frac{\vec{T}O}{TO^3} - \frac{\vec{T}M}{TM^3} \right) - m \vec{\omega}_s \wedge (\vec{\omega}_s \wedge \vec{OM})$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_s \wedge (\vec{\omega}_s \wedge \vec{OM}) &= \omega_s \vec{u}_y \wedge (\omega_s \vec{u}_y \wedge (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z)) \\ &= -\omega_s^2 (x \vec{u}_x + z \vec{u}_z) \end{aligned}$$

$$\vec{F}_e + \vec{F}_g = -m \frac{k}{r_s^3} (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y - 2z \vec{u}_z) + m \omega_s^2 (x \vec{u}_x + z \vec{u}_z)$$

comme  $\frac{k}{r_s^3} = \omega_s^2$ ,

$$\boxed{\vec{F}_e + \vec{F}_g = m \omega_s^2 (3z \vec{u}_z - y \vec{u}_y)}$$



II B 5  $m \vec{a} = \vec{F}_{ie} + \vec{F}_G + \vec{F}_{ic}$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ic} &= -2m\omega_s \vec{u}_y \wedge (\dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z) \\ &= 2m\omega_s (-\dot{z} \vec{u}_x + \dot{x} \vec{u}_z) \end{aligned}$$

En utilisant l'expression de  $\vec{F}_{ic} + \vec{F}_G$  précédente et en projetant on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\omega_s \dot{z} & (1) \\ \ddot{y} = -\omega_s^2 y & (2) \\ \ddot{z} = 3\omega_s^2 z + 2\omega_s \dot{x} & (3) \end{cases}$$

II B 6 (1) s'intègre en  $\dot{x} = \dot{x}_0 - 2\omega_s (z - z_0)$  (1')

que l'on reporte dans (3) pour obtenir

$$\ddot{z} + \omega_s^2 z = 2\omega_s (\dot{x}_0 + 2\omega_s z_0)$$

Cette équation-diff se résout en :

$$z = B \cos \omega_s t + C \sin \omega_s t + A$$

où A est une solution particulière constante.

$$A = 2 \frac{\dot{x}_0}{\omega_s} + 4 z_0$$

B et C se déduisent des conditions initiales.

$$B = - \left( \frac{2 \dot{x}_0}{\omega_s} + 3 z_0 \right) \text{ et } C = \frac{\dot{z}_0}{\omega_s}$$

II B 7 (1') donne, en éliminant  $z(t)$ :

$$\dot{x} = -3(\dot{x}_0 + 2\omega_s z_0) + 2(2\dot{x}_0 + 3z_0)\omega_s t - 2\dot{z}_0 \sin \omega_s t$$

qui s'intègre en:

$$x = x_0 - 3(\dot{x}_0 + 2\omega_s z_0)t + 2 \frac{(2\dot{x}_0 + 3z_0)}{\omega_s} \sin \omega_s t + \frac{2z_0}{\omega_s} (\cos \omega_s t - 1)$$

II B 8 a) Dans ce cas  $z_0 = -h$   $x_0 = -l_0$   $\dot{z}_0 = 0$

$\dot{x}_0$  est la vitesse de dérive calculé en II A

$$\dot{x}_0 = \frac{3}{2}\omega_s h \quad \text{donc} \quad \dot{x}_0 = -\frac{3}{2}\omega_s z_0$$

II B 8 b)  $2\dot{x}_0 + 3z_0$  est ici nul. L'expression générale

de  $x(t)$  se réduit à:

$$x = x_0 - 3\left(-\frac{3}{2}\omega_s z_0 + 2\omega_s z_0\right)t$$

$$x = x_0 + \frac{3}{2}\omega_s h t$$

De plus,  $B=0$ ,  $C=0$ ,  $A = 2 \frac{3}{2} \frac{\omega_s h}{\omega_s} - 4z_0 = -h$

Donc  $z(t) = -h$ .

On trouve bien un mvt rect uniforme de vitesse  $\frac{3}{2}\omega_s h$ .

II C 1  $\bar{A}$   $t=0$ , ces relations donnent  $x = x_0$  et

$$z_0 = -\frac{2}{3} \frac{v_s}{\omega_s} \quad \text{Or on a par ailleurs } z_0 = -h.$$

Donc  $\frac{2}{3} \frac{v_s}{\omega_s} = h$  soit  $v_s = \frac{3}{2}\omega_s h$ .

On reconnaît la vitesse de dérive.

II C 2 À  $t=0$ , l'ATV dérive et  $\vec{v} = v_s \vec{u}_x$

À  $t=0^+$ , on calcule  $\dot{z}=0$  et  $\dot{x} = \dot{x}_0$  donc  $\vec{v}(0^+) = \dot{x}_0 \vec{u}_x$ .

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(0^+) - \vec{v}(0^-) = (\dot{x}_0 - v_s) \vec{u}_x$$

$$\dot{x}_0 = \Delta v + v_s$$

En éliminant  $\dot{x}_0$  dans les expressions fournies :

$$\begin{cases} z = \frac{2}{\omega_s} \left( \Delta v - \frac{1}{3} v_s - \Delta v \cos \omega t \right) \\ x = (v_s - 3 \Delta v) t + \frac{4 \Delta v}{\omega_s} \sin \omega_s t - L_2 \end{cases}$$

II C 3. On cherche  $t$  t.q.  $z=0$ . On obtient

$$\Delta v (1 - \cos \omega t) = \frac{v_s}{3}$$

$$\cos \omega t = 1 - \frac{v_s}{3 \Delta v}$$

Cette équation n'a de solution que si  $1 - \frac{v_s}{3 \Delta v} \geq -1$

i.e.  $\Delta v \geq \frac{v_s}{6}$

On minimisera le coût en prenant  $\Delta v = \frac{v_s}{6}$ .

II C 4 Le but est, partant de  $Z=0$ , d'atteindre  $z=0$

i.e.  $Z=1$ . La trajectoire (7) ne le permet pas.

(\*) Parmi les autres, c'est la (6) qui paraît la meilleure

car l'arrivée se fait avec  $\dot{z}=0$ . On retrouve  $\frac{v_s}{\Delta v} = 6$

comme en II C 3.

$$\underline{\Delta v = v_s / 6 = 1,3 \text{ km.s}^{-1}}$$

8

II C 5 Si  $v_s = 6 \Delta v$ ,  $\cos \omega_s t = -1$   $t = \frac{\pi}{\omega_s} = \frac{T_s}{2} = 46 \text{ min}$

II C 6 On observe un point anguleux en  $A_3$ , signe d'un nouveau  $\Delta v$ .

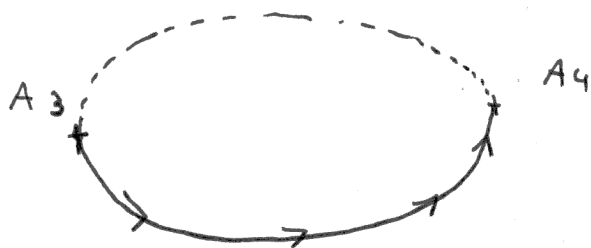
II D 1 On reconnaît les équations paramétriques d'une

ellipse de centre  $(x_c = -L_3, z_c = 0)$ . En  $A_4, z = 0$

donc  $\omega_s t = \pi$ ,  $\cos \omega_s t = -1$  et  $x_4 = \frac{4v_f}{\omega_s} - L_3$

Comme  $-L_4 = x_4$ ,  $\frac{4v_f}{\omega_s} = L_3 - L_4$

Le grand axe de l'ellipse mesure  $L_3 - L_4 = 3250 \text{ m}$



II D 2  $\omega_s t = \pi$   $t = \frac{\pi}{\omega_s} = \frac{T_s}{2} = 46 \text{ min}$

II D 3 Réaliser précisément et au bon moment les

$\Delta v$  « à vue » semble difficile.

\* Il y a un problème. En  $A_3, z = 0$  et  $x = -L_3$

donc  $X = \frac{-L_3 + L_2}{h} = 1,15$ .

Mais aucune trajectoire n'atteint  $Z = 1, X = 1,15$ .

Mystère!