Électrostatique

I Loi de Coulomb et conséquences

1. Description des charges électriques
2. Loi de Coulomb
3. Champ créé par une distribution de charges
4. Transformation et invariance d'un système physique
5. Invariances des sources et propriétés du champ

II Circulation de $\vec{E}$ et potentiel

1. Potentiel créé par une charge ponctuelle
2. Potentiel créé par une distribution de charges
3. Du potentiel au champ
4. Circulation du champ électrique
5. Formulation locale

III Flux de $\vec{E}$

1. Flux émis par une charge ponctuelle
2. Théorème de Gauss
3. Calcul du champ par le théorème de Gauss
4. Flux et topographie du champ électrique
5. Équation de Maxwell-Gauss
6. Équations de Poisson et de Laplace

IV Propriétés des dipôles électriques

1. Définitions
2. Moment dipolaire des molécules
3. Potentiel et champ créés par un dipôle électrostatique
4. Actions subies par un dipôle plongé dans un champ extérieur
5. Interaction ion-dipôle
6. Interactions dipôle-dipôle

V Condensateur plan

1. Modélisation et calcul du champ
2. Capacité du condensateur plan
3. Énergie du condensateur plan

VI Encore deux thèmes en vrac

1. Énergie électrostatique des noyaux atomiques
2. Analogies concernant le champ gravitationnel

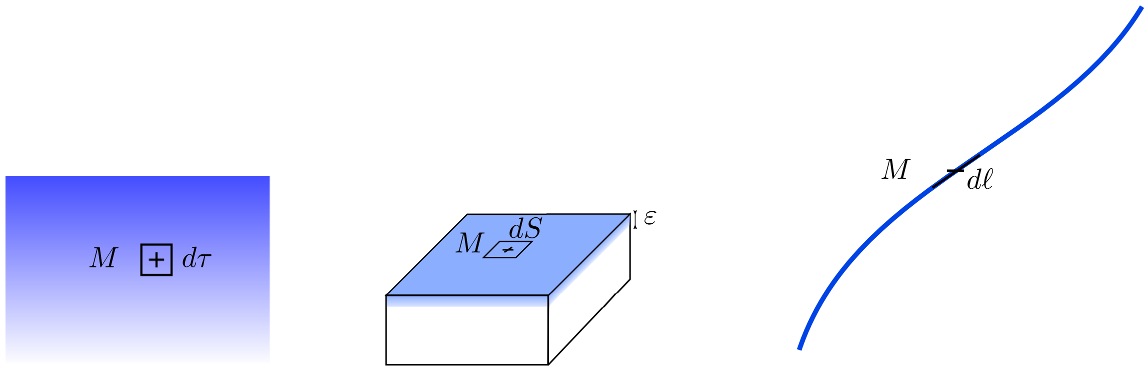


Figure 1 – Distributions de charges de trois types : volumique, surfacique et linéïque.

Principe de superposition
Le champ électrostatique créé par un ensemble de charges est égal à la somme des champs que créerait séparément chacune de ces charges.

Transformation d'un système physique
Soit $\mathcal{T}$ une transformation géométrique de l'espace associant à tout point M une image $M' = \mathcal{T}(M)$. À tout vecteur $\vec{AB}$ de l'espace, on associe le vecteur $\vec{A'B'}$ et on note $\vec{A'B'} = \mathcal{T}(\vec{AB})$.
Soit $\phi(M)$ ou $\vec{V}(M)$ un champ scalaire ou vectoriel, c'est à dire une grandeur physique définie en tout point M de l'espace. Au point M', on affecte la grandeur physique ϕ' ou $\vec{V}'$ définie de la manière suivante.

- Pour une grandeur scalaire, $\phi'(M') = \phi(M)$.
- Pour une grandeur vectorielle, $\vec{V}'(M') = \mathcal{T}(\vec{V}(M))$

À partir d'un système physique $\mathcal{S}$ défini par des champs, la transformation $\mathcal{T}$ produit donc un nouveau système physique $\mathcal{S}'$ défini par de nouveaux champs.

Invariance d'un champ par une transformation
On dit qu'un champ scalaire ou vectoriel F est invariant par une transformation $\mathcal{T}$ si $\forall M, F'(M') = F(M')$. Le nouveau champ au point M' est identique à celui qui régnait en ce même point M' avant la transformation $\mathcal{T}$. Du point de vue de la grandeur physique F, le nouveau et l'ancien système sont identiques.

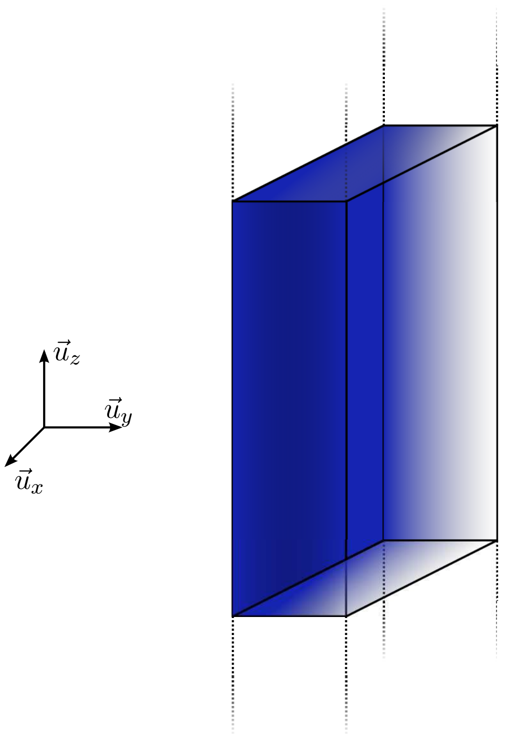


FIGURE 2 – Charges sources invariantes par translation

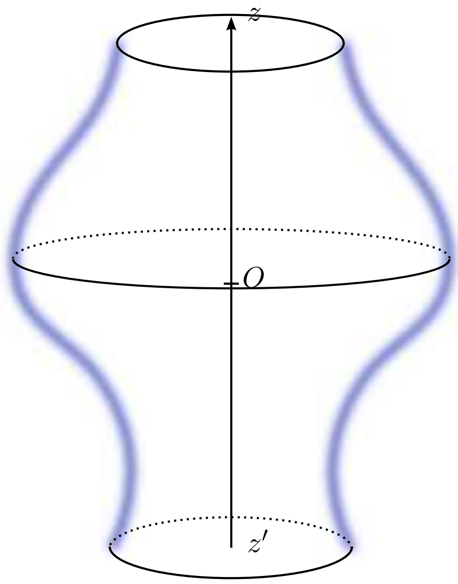


FIGURE 3 – Charges sources invariantes par rotation

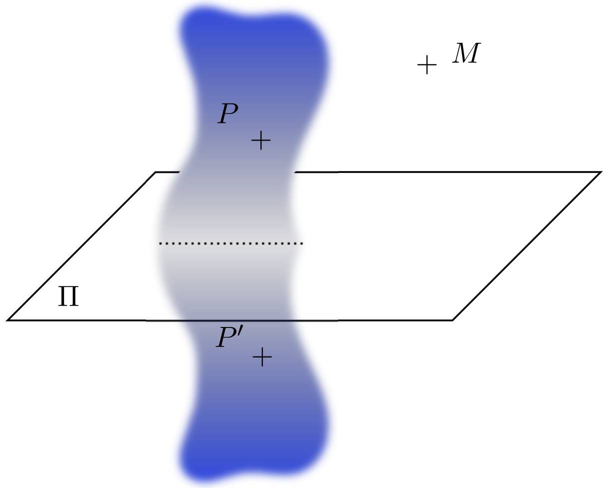


Figure 4 – Charges sources invariantes par symétrie plane : Π est le plan de symétrie

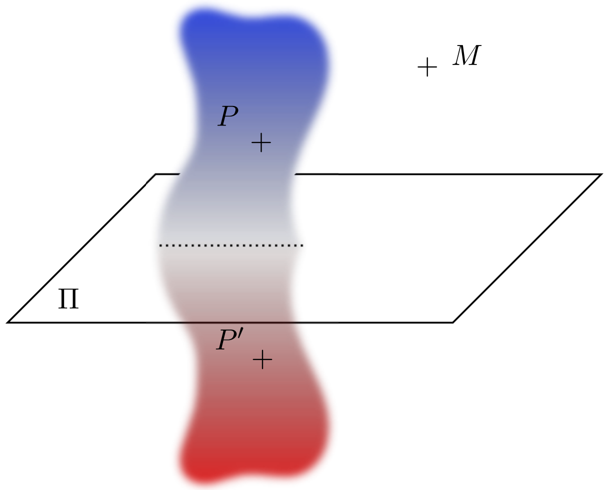


Figure 5 – Charges sources anti-invariantes par symétrie plane : Π est le plan d'antisymétrie

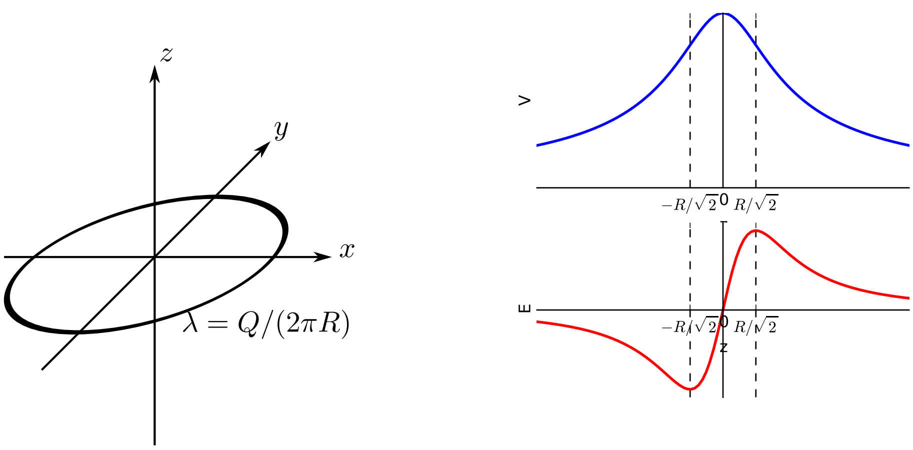


Figure 6 – Champ créé par une spire chargée.

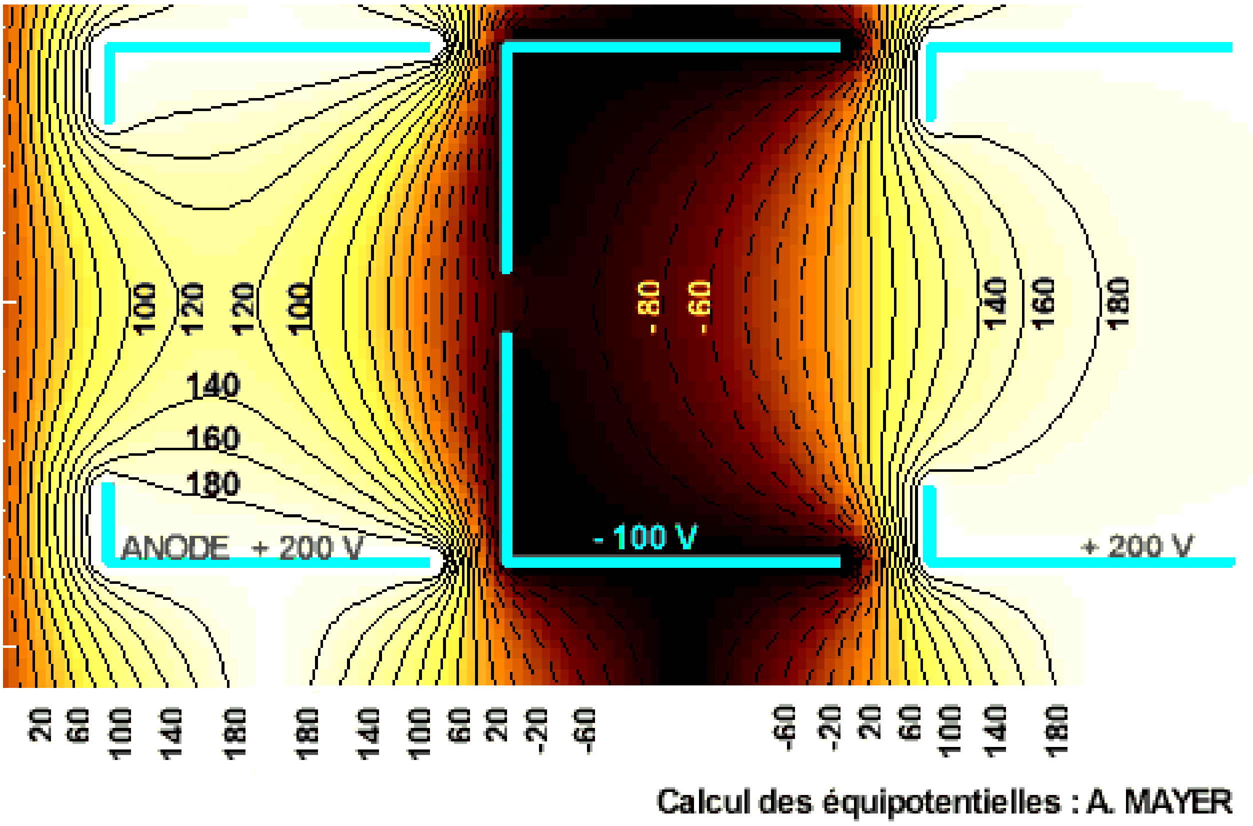


Figure 7 – Équipotentielles dans une lentille électrostatique utilisée en microscopie électronique. Les électrons de déplacent de gauche à droite et le réglage du potentiel négatif permet de choisir le point de focalisation du faisceau.

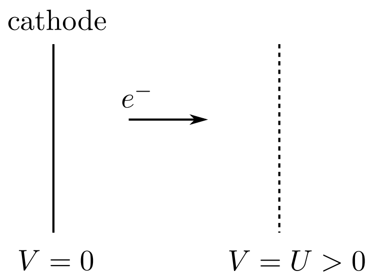


Figure 8 – Accélération d'un électron par une tension électrique

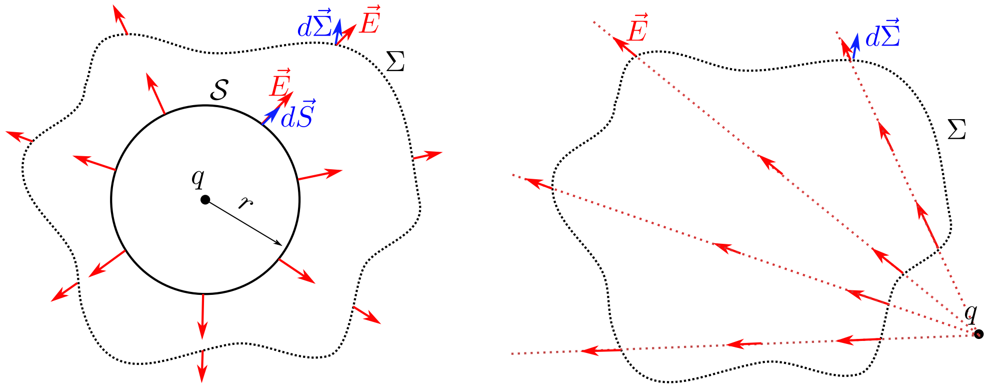


FIGURE 9 – Flux d'une charge ponctuelle à travers une surface fermée. À gauche, la charge est dans le volume délimité par cette surface. À droite, elle en est à l'extérieur.

Soit Σ une surface fermée orientée vers l'extérieur. Soit Q_{int} la somme des charges électriques se trouvant dans le volume limité par Σ. Le flux $\Phi(\vec{E},\Sigma)$ du champ électrique $\vec{E}$ à travers Σ est donné par

$$\Phi(\vec{E},\Sigma) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

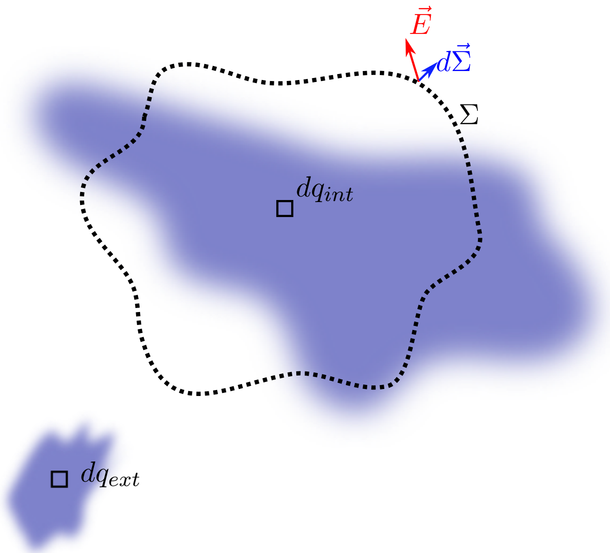


FIGURE 10 – Illustration du théorème de Gauss

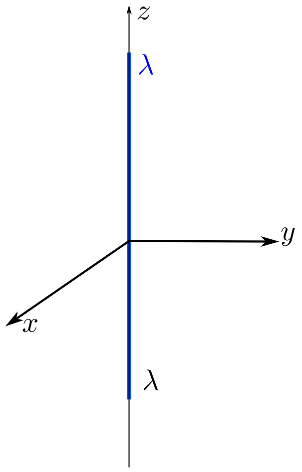


Figure 11 – Étude du champ créé par un fil rectiligne infini

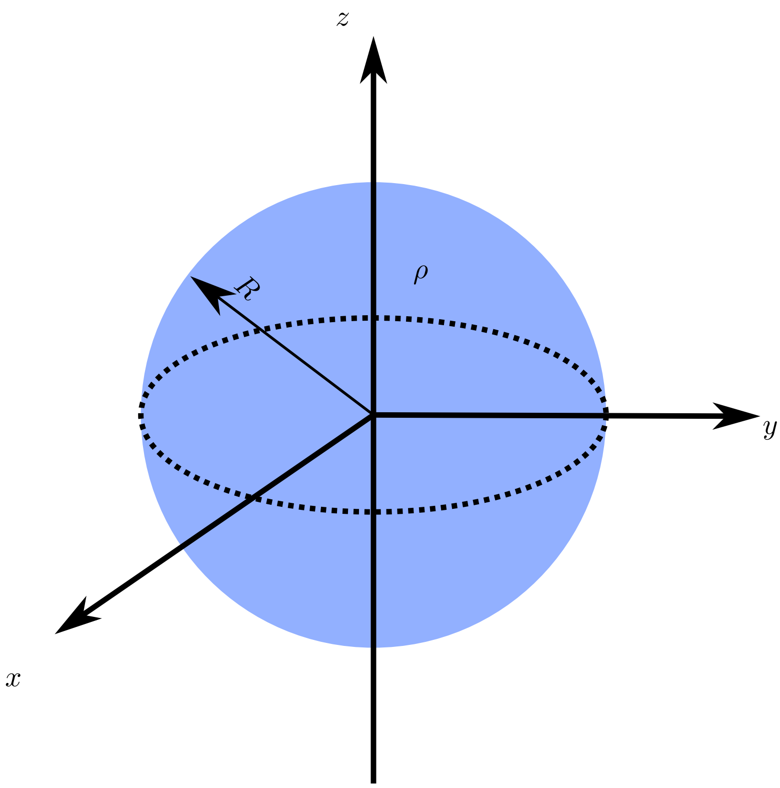


Figure 12 – Étude du champ créé par une boule uniformément chargée

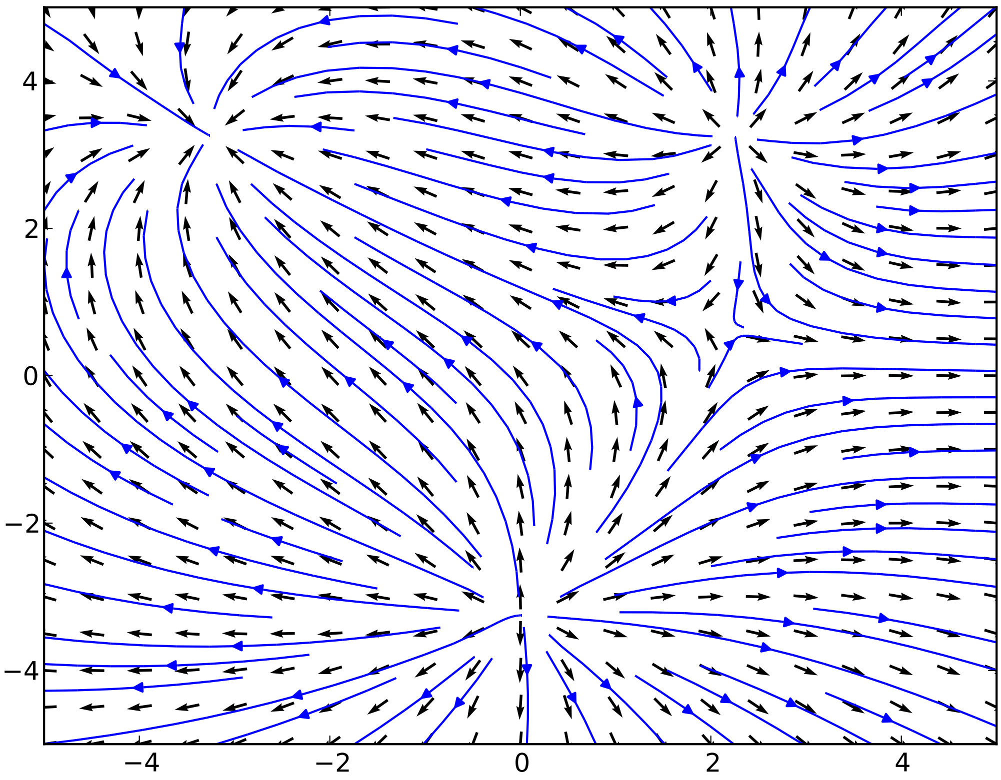


FIGURE 13 – Champ électrostatique créé par trois charges ponctuelles. Les flèches représentent un vecteur unitaire colinéaire à $\vec{E}$. Localisez les charges qui créent ce champ et identifiez leur signe.

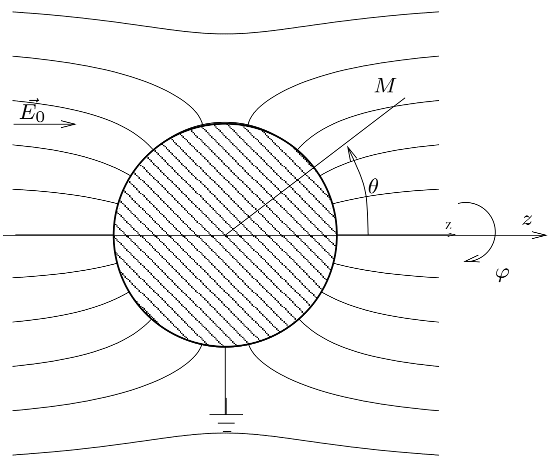
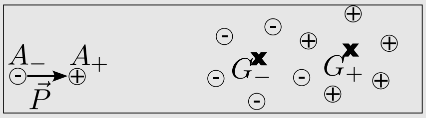


FIGURE 14 – Boule métallique plongée dans un champ uniforme. Les lignes de champ tracées résultent de la superposition de ce champ avec celui créé par la boule polarisée.

Dipôle électrique

On appelle dipôle électrique un ensemble de charges globalement neutre dans lequel les barycentres des charges positives et négatives sont distincts.



On le caractérise par son moment dipolaire électrique

$$\boxed{\vec{P} = q\,\overrightarrow{A_-A_+}} \quad \text{(C.m)} \qquad \vec{P} = q\,\overrightarrow{G_-G_+} = \sum_i q_i \overrightarrow{OM_i}$$

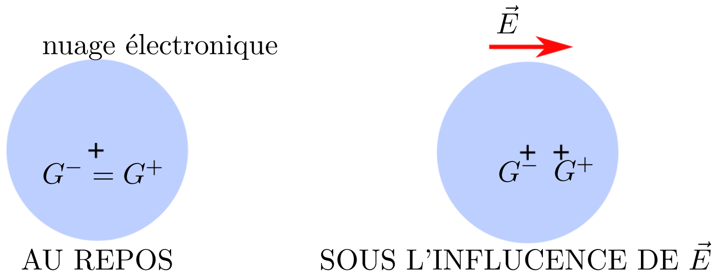


Figure 15 – Modèle atomique de Thomson inversé (dans le modèle de Thomson historique, l'électron ponctuel se déplaçait à l'intérieur d'une grosse boule positive représentant le noyau atomique)

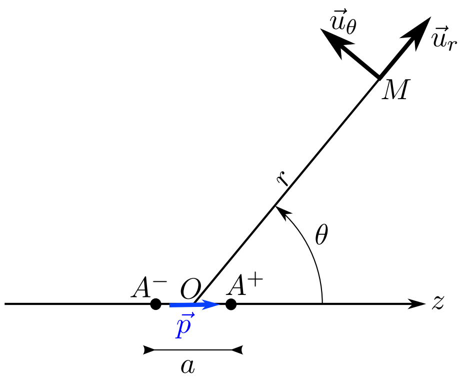


Figure 16 – Notations utilisées pour le calcul du champ dipolaire

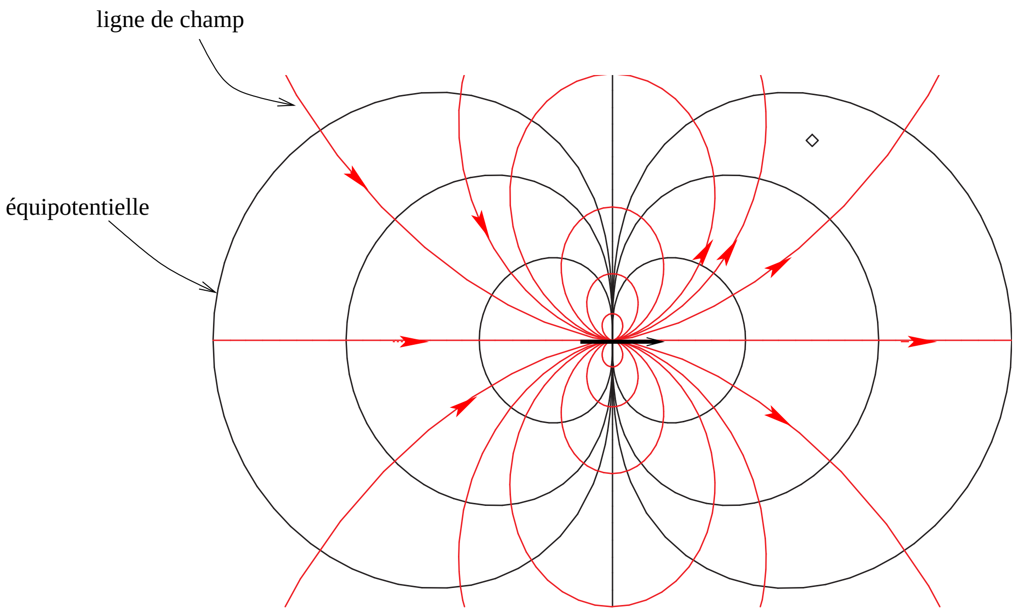


FIGURE 17 – Lignes de champ et équipotentielles dipolaires

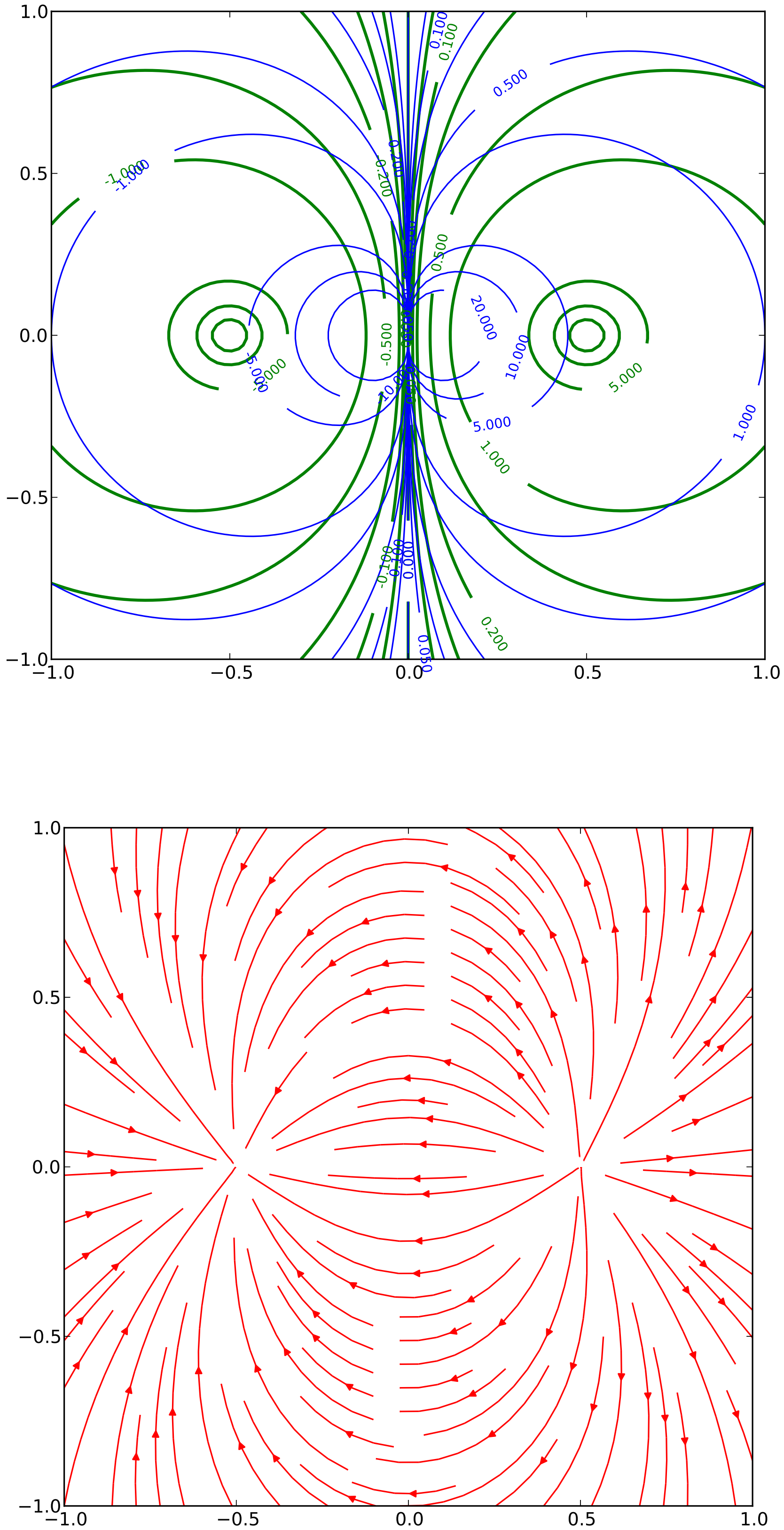


Figure 18 – Détail des équipotentielles (en haut) et des lignes de champ (en bas) produites par un dipôle électrostatique. L'échelle de longueur est a, distance entre les deux charges. L'unité de potentiel est $Q/(4\pi\epsilon_0 a)$. Tout près des charges, en particulier dans la région qui les sépare, on observe la faillite de l'approximation dipolaire. Les équipotentielles et les lignes de champ se démarquent nettement de celles représentées sur la figure 17.

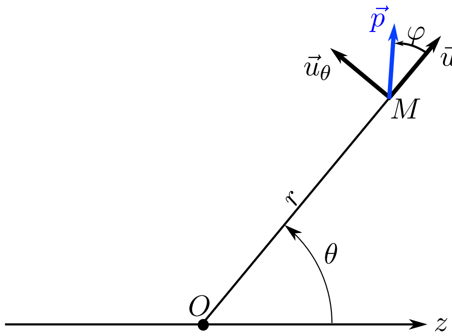


Figure 19 – Interaction d'un ion et d'un dipôle

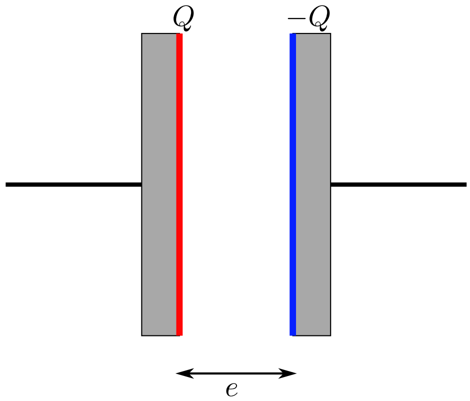


Figure 20 – Modèle de condensateur plan

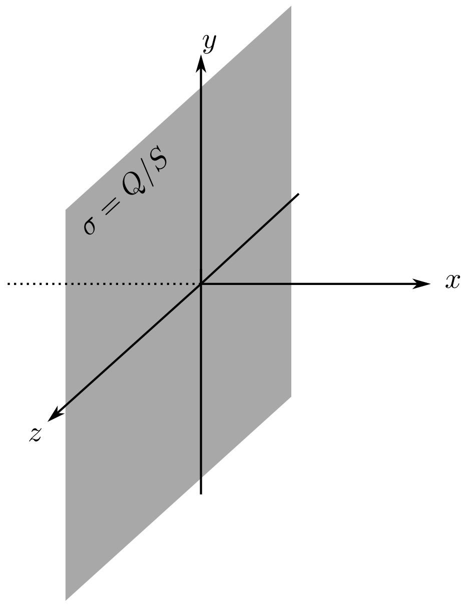


Figure 21 – Étude du champ créé par un plan infini

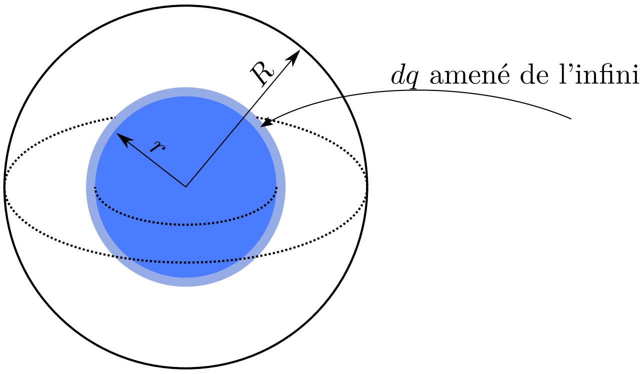
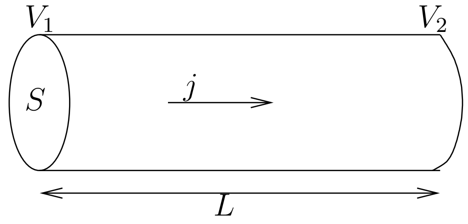


FIGURE 22 – Constitution d'une boule chargée par adjonction de charges amenées depuis l'infini

Électrostatique	**Gravitation**
$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2}$	
charge q	
$\vec{F} = q\vec{E}(M)$	
champ créé par une charge ponctuelle $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2}$	
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	
Gauss $\oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	
MG $\mathrm{div}\,\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$	
$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(M)$	
....	

Deux petites mises au point

Dans le chapitre sur les source du champ, nous avons démontré l'expression de la résistance d'un fil électrique $R = \ell/(\gamma S)$, analogue à celle rencontrée en thermique et valable pour les problèmes à une dimension d'espace en coordonnées cartésiennes.



Pour aboutir à ce résultat, j'ai utilisé l'expression $E = U/\ell$ sans justification précise car nous n'avions pas encore traité le cours d'électrostatique. La démonstration s'en trouve simplifiée mais manque de rigueur. Je vous en propose donc une autre. Soit I l'intensité dans le fil. La densité volumique de courant est $j = I/S$ et d'après la loi d'Ohm le champ électrique est donné par $E = j/\gamma = I/(\gamma S)$. Vectoriellement, on peut écrire $\vec{E} = I/(\gamma S)\,\vec{u_x}$. La ddp entre des deux extrémités du fil est

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}.d\vec{\ell} = \int_{x_1}^{x_2} E dx = E\ell = \frac{\ell I}{\gamma S} \quad .$$

Par définition de la résistance, on a $U = RI$ donc ici $R = \frac{\ell}{\gamma S}$.

Dans cet exemple comme dans le précédent, nous avons utilisé $U = \int \vec{E}.d\vec{\ell} = E\ell$ où ℓ est la longueur de la courbe suivie. Nous avons procédé ainsi à diverses reprises dans le cours, notamment dans le cas du condensateur plan, pour l'effet Hall ou encore pour estimer le champ à partir d'une carte d'équipotentielles. Ce calcul est très simple parce que nous nous sommes placés dans des cas favorables où E garde la même valeur sur toute la courbe le long de laquelle on calcule la circulation. Prenez garde au fait que si E n'est pas uniforme, il faudra effectuer une intégrale plus compliquée en cherchant une primitive !

Un exemple classique est celui du condensateur cylindrique formé de deux armatures en forme de cylindres coaxiaux. L'électrode interne porte la charge Q, l'électrode externe la charge $-Q$. En négligeant les effets de bord, on établit facilement en appliquant la théorème de Gauss l'expression suivante du champ électrique :

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi r h \epsilon_0}\,\vec{u}_r \quad .$$

La tension entre les armatures est donnée par

$$\begin{aligned} U = V_1 - V_2 &= \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.d\vec{\ell} \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi r h \epsilon_0}\vec{u}_r.dr\vec{u}_r = \frac{Q}{2\pi h \epsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

Par définition de la capacité, $U = Q/C$. On identifie donc ici

$$C = \frac{2\pi h \epsilon_0}{\ln\frac{R_1}{R_1}} \quad .$$