Chapitre 11 — dénombrabilité et sommabilité

1 Ensembles dénombrables

1.1 Définition et exemples

Définition d'un ensemble dénombrable : c'est un ensemble en bijection avec $\mathbb{N}$.
Exemples : l'ensemble $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres pairs, toute partie infinie de $\mathbb{N}$.
Tout ensemble infini qui s'injecte dans $\mathbb{N}$ est dénombrable. Exemples : les ensembles $\mathbb{N}^k$ et $\mathbb{Q}$.
Tout produit fini d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.
Toute union finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est un ensemble fini ou dénombrable.

1.2 Exemples d'ensembles non dénombrables

L'ensemble $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{R}$.

2 Familles sommables

2.1 Somme d'une famille de nombres positifs

Étant donné une famille $x = (x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ d'éléments de $[0, +\infty]$, on note

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} x_i$$

la borne supérieure de l'ensemble $\left\{ \sum_{j\in \mathrm{J}} x_j \ ;\ \mathrm{J} \in \mathcal{P}_f(\mathrm{I}) \right\}$, où $\mathcal{P}_f(\mathrm{I})$ désigne l'ensemble des parties finies de I.

C'est un élément de $[0, +\infty]$.

Le *support* de la famille x est l'ensemble $\{i \in \mathrm{I}\ ;\ x_i > 0\}$.
Pour que la somme $\sum_{i\in \mathrm{I}} x_i$ soit finie, il est nécessaire que le support de x soit fini ou dénombrable.
Pour cette raison, on suppose dans la suite que I est un ensemble fini et dénombrable.

Théorème admis : étant donné une énumération $\{\varphi(n)\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ de I, la somme $\sum_{i\in \mathrm{I}} x_i$ est finie si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} x_{\varphi(n)}$ converge, auquel cas on a l'égalité

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}.$$

En particulier, la somme de cette série ne dépend pas du choix de l'énumération φ de I.

Contre-exemple dans le cas semi-convergent : la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Sommation par paquets : pour toute décomposition $\mathrm{I} = \bigcup_{i\in \mathbb{N}} \mathrm{I}_n$ comme union disjointe dénombrable, on a l'égalité

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in \mathrm{I}_n} x_i \right).$$

Cas particuliers importants

$$\sum_{(i,j)\in \mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{(i,j)\in \mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k} \right).$$

Produit de deux sommes. Produit de Cauchy. Sommes indexées par $\mathbb{Z}$.

2.2 Sommabilité d'une famille de nombres complexes

Dire qu'une famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de nombres complexes est *sommable* signifie que $\sum\limits_{i\in \mathrm{I}} |x_i| < +\infty$.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{I}$ une énumération.
Théorème admis : la famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_{\varphi(n)}$ converge absolument.

La somme de cette série ne dépend donc pas du choix de φ et on la note $\sum\limits_{i\in \mathrm{I}} x_i$. C'est la *somme* de la famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$.

Dans ce cas, on a de plus l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{i\in \mathrm{I}} x_i\right| \leqslant \sum_{i\in \mathrm{I}} |x_i|\,.$$

Critère de domination : si pour tout $i \in \mathrm{I}$, on a la majoration $|x_i| \leqslant y_i$, alors la sommabilité de la famille $(y_i)_{i\in \mathrm{I}}$ implique celle de la famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$.

Linéarité, croissance, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes, produit de Cauchy.

Exercice 1. (*) Soit $p \in]0,1[$. Soit $\lambda > 0$. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$u_{n,k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Calculer la somme de la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$.

Exercice 2. (*) Soit $\alpha > 1$.

Étudier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{(i+j)^\alpha}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ et calculer sa somme à l'aide de la fonction ζ.

Pour cela, on regroupera les couples (i,j) par paquets dans lesquels $i+j$ est une constante.

Exercice 3. (*) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(2^{-n} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{4^k}{k!}\right)$.

Exercice 4. (*) On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de terme général $b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ -1 & \text{si } i = j \\ 1/2^{j-i} & \text{si } i < j. \end{cases}$

Vérifier que les sommes doubles $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\sum\limits_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\sum\limits_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ existent et calculer leurs valeurs.

La famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

Exercice 5. (**) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Montrer que la famille $(z^{ab})_{(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et trouver une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendante de z telle que

$$\sum_{(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2} z^{ab} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n.$$

Exercice 6. (**) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Trouver une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendante de z telle que

$$\frac{1}{1-z^2} \times \frac{1}{1-z^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n.$$
