Problème 1 : autour de la fonction Gamma (**)

Pour tout x dans $]0,+\infty[$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $]0,+\infty[$, on pose $\mathrm{B}_n(x) = \displaystyle\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n\ \mathrm{d}y$.

Question 1. Montrer rapidement que les nombres $\Gamma(x)$ et $\mathrm{B}_n(x)$ sont bien définis.

Question 2. Pour tout x dans $]0,+\infty[$, établir un lien entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.

Question 3. Pour tout x dans $]0,+\infty[$ et tout n dans $\mathbb{N}^*$, établir un lien entre $\mathrm{B}_n(x)$ et $\mathrm{B}_{n-1}(x+1)$.

En itérant cette relation, obtenir une expression explicite de $\mathrm{B}_n(x)$.

Question 4. Pour tout x dans $]0,+\infty[$ et tout n dans $\mathbb{N}$, vérifier la relation $\mathrm{B}_n(x) = \dfrac{\Gamma(x)\times\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}$.

Question 5. Soit x dans $]0,+\infty[$. En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer la relation suivante

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ \mathrm{d}t.$$

En déduire la relation suivante

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x\times n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Question 6. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$.

Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. Sa limite sera notée γ.

Question 7. Pour tout x dans $]0,+\infty[$ et tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $v_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right]$.

Montrer que la suite de fonctions $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $v : x\mapsto \dfrac{\exp(-\gamma x)}{x\Gamma(x)}$.

Question 8. En déduire la relation suivante

$$\forall x\in\ ]0,+\infty[,\qquad \ln(\Gamma(x)) = -\gamma x - \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right].$$

Question 9. Prouver que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et prouver l'identité

$$\forall x\in\ ]0,+\infty[,\qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

En particulier, que vaut $\Gamma'(1)$?

Question 10. On admet la formule suivante, issue de la théorie des séries de Fourier, que nous n'avons plus au programme

$$\forall x\in\ ]0,1[,\qquad \pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}.$$

Pour tout x dans $]0,1[$, prouver l'identité $\Gamma(x)\times\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$ (connue sous le nom de *formule des compléments*).

Problème 2 : démonstration du théorème de Cayley-Hamilton (**)

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non trivial de dimension finie et un endomorphisme u de E.

On fixe provisoirement un vecteur x_0 non nul de E.

a. On note $\mathrm{I}(x_0)$ l'ensemble des entiers naturels k tels que la famille $(u^i(x_0))_{0\leqslant i\leqslant k}$ soit libre.

Montrer que l'ensemble $\mathrm{I}(x_0)$ possède un plus grand élément, que l'on note m dans la suite.

On note $\mathcal{F}$ la famille $(u^i(x_0))_{0\leqslant i\leqslant m}$ et on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille. La famille $\mathcal{F}$ est alors une base de cet espace vectoriel.

b. Montrer qu'il existe un élément $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ de $\mathbb{K}^{m+1}$ tel que la relation suivante soit vérifiée

$$u^{m+1}(x_0) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i u^i(x_0).$$

En déduire que le sous-espace vectoriel F est stable par l'endomorphisme u.

On note $\tilde{u}$ l'endomorphisme de F induit par u.

c. Écrire la matrice de $\tilde{u}$ dans la base $\mathcal{F}$ de F et calculer son polynôme caractéristique $\chi_{\tilde{u}}$.

d. Montrer que le vecteur $\chi_{\tilde{u}}(u)(x_0)$ est nul.

e. Montrer que le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.

Exercice 1. (**) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe E de dimension finie.

Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire stable par f.

Exercice 2. (***) Pour tout entier n strictement positif, montrer la propriété (H_n) dont l'énoncé est ≪ pour tout espace vectoriel réel E de dimension n, pour toute famille d'endomorphismes de E tous diagonalisables qui commutent entre eux, il existe une base de E dont les vecteurs sont des vecteurs propres pour tous les endomorphismes de cette famille ≫.

On raisonnera bien sûr par récurrence sur n ; au moment de l'hérédité, on commencera par évacuer le cas où tous les endomorphismes sont des homothéties.

Exercice 3. (**) On considère une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on introduit la matrice B de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ suivante

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ 0 & \mathrm{A} \end{pmatrix}.$$

On suppose que la matrice B est diagonalisable. On introduit alors un polynôme annulateur de B, noté P, que l'on suppose scindé, à racines simples.

a. Démontrer l'égalité $\mathrm{P(B)} = \begin{pmatrix} \mathrm{P(A)} & \mathrm{AP'(A)} \\ 0 & \mathrm{P(A)} \end{pmatrix}$.

b. Montrer que la matrice $\mathrm{P'(A)}$ est inversible.

c. Qu'en déduit-on pour la matrice A ?

Exercice 4. (***) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on fait l'hypothèse $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^k) = 0$.

Montrer que A est nilpotente.
