

# PC\* 25 - DEVOIR N° 9

corrigé

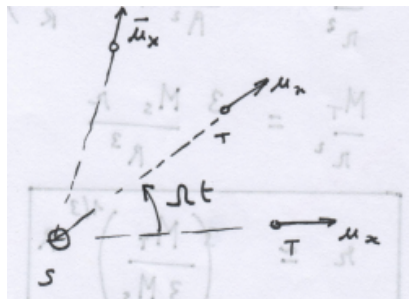
## Positionnement d'un télescope spatial

1. On applique le PFD à la Terre en notation autour de  $S$  dans  $R_h$  et on projette sur  $\vec{u}_x$  :

$$-M_T R \Omega^2 = -GM_T M_s \quad \Omega = \sqrt{\frac{GM_s}{R^3}} \quad T_T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_s}} .$$

La Terre parcourt son orbite en 1 an =  $T_T$ .

2.  $R_0$  est en rotation uniforme dans  $R_h$ . Ses axes  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  ne gardent pas une direction fixe donc il n'est pas galiléen.



3. Le satellite est soumis à :

- l'attraction de la Terre  $\vec{F}_T = -\frac{GM_T m}{r^2} \vec{u}_x$  ;
- l'attraction du Soleil  $\vec{F}_S = -\frac{GM_S m}{(R+r)^2} \vec{u}_x$
- la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{F}_{ie} = m\Omega^2 \overrightarrow{SL_2} = m\Omega^2 (R+r) \vec{u}_x$$

Comme le satellite est en équilibre dans  $R_0$ , sa vitesse  $y$  est nulle et il n'y a pas de force de Coriolis. À l'équilibre :

$$-\frac{GM_T m}{r^2} - \frac{GM_S m}{(R+r)^2} + m\Omega^2 (R+r) = 0$$

$$\boxed{\frac{M_T}{r^2} + \frac{M_S}{(R+r)^2} = \frac{M_S}{R^3} (R+r)}$$

4. En utilisant  $r/R \ll 1$ , on obtient :

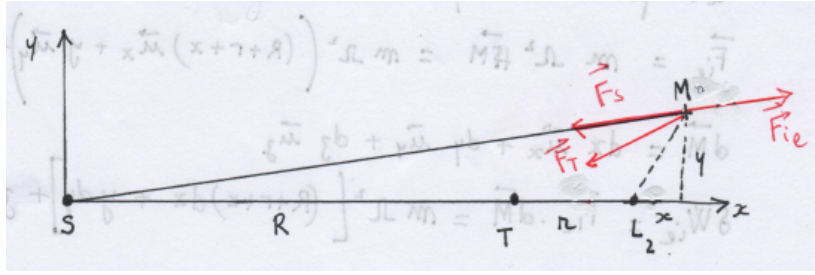
$$\frac{M_T}{r^2} + \frac{M_S}{R^2} \left(1 - \frac{r}{R}\right) \approx \frac{M_S}{R^2} \left(1 + \frac{r}{R}\right) \quad \frac{M_T}{r^2} = \frac{3M_S r}{R^3} \quad \boxed{r \approx \left(\frac{M_T}{3M_S}\right)^{1/3} R} .$$

5. Numériquement,  $\frac{M_T}{3M_S} = 1.00 \cdot 10^{-6}$  et

$$r = \frac{1}{100} R = 1.5 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Comme  $\frac{r}{R} = 1/100$ , l'approximation est validée.

6. Voici une représentation des forces demandées.



7. L'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle est bien connue :

$$E_{Ps} = -\frac{GM_S m}{SM} \quad E_{PT} = -\frac{GM_T m}{TM} .$$

Pour exprimer les distances, utilisons la relation de Chasles et des produits scalaires.

$$S\vec{M} = S\vec{L}_2 + L_2\vec{M} = (R+r)\vec{u}_x + x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

$$SM = (S\vec{M} \cdot S\vec{M})^{1/2} = [(R+r+x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$$

$$T\vec{M} = T\vec{L}_2 + L_2\vec{M} = (r+x)\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

$$TM = (T\vec{M} \cdot T\vec{M})^{1/2} = [(r+x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$$

$E_{Ps} = -\frac{GM_S m}{[(R+r+x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \quad E_{PT} = -\frac{GM_T m}{[(r+x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}}$
---

La force d'inertie d'entraînement est  $\vec{F}_{ie} = m\Omega^2 \vec{r} = m\Omega^2 ((R+r+x)\vec{u}_x + y\vec{u}_y)$ . On écrit un déplacement infinitésimale  $d\vec{M} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$  puis on exprime le travail

$$\delta W_{ie} = \vec{F}_{ie} \cdot d\vec{M} = m\Omega^2 [(R+r+x)dx + ydy]$$

Par définition d'une énergie potentielle,  $\delta W_{ie} = -dE_{pie}$  et par intégration on obtient

$$E_{pie} = -\frac{1}{2}m\Omega^2 [(R+r+x)^2 + y^2]$$

On aurait pu écrire directement  $E_{pie} = -\frac{1}{2}m\Omega^2 SM^2$ , expression vue en cours. On vérifie que  $\vec{F}_{ie} = -\vec{\nabla} E_{pie}$ .

8. Appliquons le PFD au satellite :

$$m\ddot{x} = F_x \Rightarrow \ddot{x} - 3\omega^2 x = 0$$

$$m\ddot{y} = F_y \Rightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

$$m\ddot{z} = F_z \Rightarrow \ddot{z} + \frac{4}{3}\omega^2 z = 0 .$$

Pour  $y$  et  $z$ , on obtient des solutions sinusoidales :  $y$  et  $z$  restent bornées. Mais pour  $x$ , on obtient  $x(t) = Ae^{\sqrt{\frac{2}{3}}\omega t}$ , en général,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ . Le satellite s'éloigne inexorablement de  $L_2$  : l'équilibre en  $L_2$  est instable.

9.  $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge (\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y) = 2m\Omega(\dot{y}\vec{u}_x - \dot{x}\vec{u}_y)$

10.

$$m \frac{d^2 T\vec{M}}{dt^2} = \vec{F}_S + \vec{F}_T + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

s'écrit en projection

$$\ddot{x} = 3\omega^2 x + 2\Omega \dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y - 2\Omega \dot{x} .$$

11. Comme  $\dot{x} = \lambda a e^{\lambda t}$ ,  $\dot{y} = \lambda b e^{\lambda t}$  et  $\ddot{x} = \lambda^2 a e^{\lambda t}$ ,  $\ddot{y} = \lambda^2 b e^{\lambda t}$ , les équations précédentes s'écrivent

$$\begin{aligned}\lambda^2 a e^{\lambda t} &= 3\omega^2 a e^{\lambda t} + 2\Omega \lambda b e^{\lambda t} \\ \lambda^2 b e^{\lambda t} &= -\omega^2 b e^{\lambda t} - 2\Omega \lambda a e^{\lambda t}\end{aligned}$$

et, après simplification par  $e^{\lambda t}$ , on obtient le système

$$\begin{cases} (\lambda^2 - 3\omega^2)a - 2\Omega \lambda b = 0 \\ 2\Omega \lambda a + (\lambda^2 + \omega^2)b = 0 \end{cases} .$$

12.  $\det A = 0$  donne  $(\lambda^2 - 3\omega^2)(\lambda^2 + \omega^2) + 4\Omega^2 \lambda^2 = 0$  soit

$$\boxed{\lambda^4 + (4\Omega^2 - 2\omega^2)\lambda^2 - 3\omega^4 = 0} .$$

13. D'après les questions 1 et 4,  $\Omega^2 = \frac{GM_S}{R^3}$  et  $r^3 = \frac{M_T}{3M_S} R^3$  donc  $\omega^2 = 3\frac{GM_S}{R^3} = 3\Omega^2$

L'équation précédente devient

$$\boxed{\Lambda^2 - 2\Omega^2 \Lambda - 27\Omega^4 = 0} .$$

14. Le discriminant de cette équation du second degré est  $\Delta = 112\Omega^2$  et  $\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{7}\Omega^2$ . On trouve donc

$$\Lambda = \Omega^2 \pm 2\sqrt{7}\Omega^2 = (1 \pm 2\sqrt{7})\Omega^2 .$$

Comme  $\Lambda = \lambda^2$ , on obtient finalement quatre solutions dont l'une est réelle positive :  $\lambda_1 = \Omega\sqrt{1 + 2\sqrt{2}}$ .

Le point de Lagrange  $L_2$  est donc instable, le télescope doit être périodiquement repositionné.

15. La valeur  $\lambda_1$  est associée à un mouvement du type  $x(t) = a e^{\lambda_1 t}$ ,  $y(t) = b e^{\lambda_1 t}$  par lequel le télescope s'éloigne de  $L_2$  avec une constante de temps

$$\tau = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\Omega\sqrt{1 + 2\sqrt{2}}} = \frac{T_T}{2\pi\sqrt{1 + 2\sqrt{2}}}$$

Cela donne l'ordre de grandeur du temps au bout duquel une opération de repositionnement est nécessaire. Comme  $T_T = 365.25$  jours,  $T \approx 23.2$  jours.

## Aérodynamique d'un casque de cyclisme

Centrale-Supélec

**Q 1.** Le nombre de Reynolds d'un écoulement est défini par

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

où  $U$  une vitesse caractéristique,  $L$  une longueur caractéristique et  $\nu = \eta/\rho$  la viscosité cinématique du fluide. Pour un cycliste roulant à 40 km/h,  $U = 11, \text{ m.s}^{-1}$  on peut prendre pour  $L$  la largeur  $L = 0,5 \text{ m}$ . On obtient alors  $Re = 3,8 \cdot 10^5$ . Ce nombre est compris entre  $10^3$  et  $10^6$  ce qui valide la forme choisie pour la force de traînée, dans laquelle  $v\vec{v}$  a une norme égale à  $v^2$ .

**Q 27.** Comme l'écoulement est irrotationnel,  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ . Donc il existe un potentiel  $\varphi$  tel que  $\vec{v} = \nabla\varphi$ . Comme l'écoulement est incompressible,  $\text{div } \vec{v} = 0$  donc  $\text{div}(\nabla\varphi) = 0$ , c'est-à-dire  $\Delta\varphi = 0$ .

**Q 28.** On remarque que  $\nabla(v_0 x) = v_0 \vec{e}_x = \vec{v}_0$  qui est bien la vitesse loin en amont, donc le potentiel de vitesse proposé convient. Les lignes de courant sont des droites dirigées par  $\vec{e}_x$ . Les équipotentielles sont des plans  $x = \text{const}$ .

**Q 29.** Pour  $n \rightarrow \infty$   $\varphi \approx \gamma r \cos \theta = \gamma x$ . Or on doit retrouver la vitesse  $v_0 \vec{e}_x$  loin du cylindre, donc  $\varphi \approx v_0 x$ . On en déduit  $\gamma = v_0$ .

**Q 30.**

$$\vec{v} = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta \quad v_r = \gamma\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta \quad v_\theta = -\gamma\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta \quad (1)$$

**Q 31.** Le vecteur normal au cylindre est  $\vec{n} = \vec{e}_r$ . La condition de bord à la surface de ce solide imperméable s'écrit  $\vec{v}(r = a) \cdot \vec{n} = 0$  c'est à dire  $v_r(r = a) = 0$ . Avec l'expression précédente de  $v_r$ , pour  $r = a$ ,  $1 - a^2/r^2 = 0$  donc  $v_r = 0$  : la condition de bord est vérifiée.

**Q 32.** L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}\right) = -\nabla P + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v} \quad (2)$$

— Hors de la couche limite, l'effet de la viscosité est négligé : on néglige  $\eta\Delta\vec{v}$ .

— L'effet de la pesanteur est négligé : on omet  $\rho\vec{g}$ .

— L'écoulement est stationnaire :  $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ .

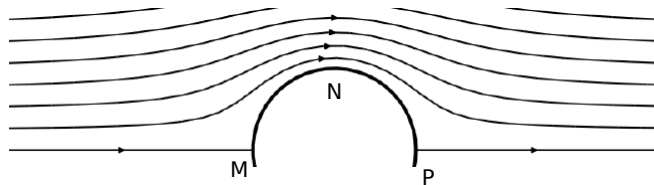
— Enfin,  $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \frac{1}{2}\nabla v^2$  car l'écoulement est irrotationnel.

L'équation de NS se simplifie donc en  $\frac{1}{2}\rho\nabla v^2 = -\nabla P$ . Comme l'écoulement est homogène,  $\rho$  est une constante et on en déduit

$$\nabla\left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho}\right) = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} \quad \text{est uniforme.} \quad (3)$$

Comme dans l'écoulement est stationnaire, cette quantité ne dépend pas non plus de  $t$ .

**Q 33.** Par conservation du débit volumique pour cet écoulement incompressible, la vitesse augmente lorsque les lignes de courant se resserrent et diminue lorsque les lignes de courant s'écartent. D'après la question précédente,  $P$  varie en sens inverse. Le long du cylindre, la pression est donc la plus forte en  $M$  et en  $P$ . Elle diminue de  $M$  jusqu'à  $N$  puis réaugmente de  $N$  jusqu'à  $P$ . On remarque que la pression est la même à droite et à gauche, ce qui signifie que les forces de pression se compensent : dans ce modèle, il n'y a donc pas de force de traînée.



**Q 34.** En négligeant le gradient de pression et l'effet de la pesanteur, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}\right) = \eta\Delta\vec{v} \quad (4)$$

Ici,  $\Delta\vec{v} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\vec{e}_x$  et  $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x}\right)(v_x(y, t)\vec{e}_x) = \vec{0}$ . En projection sur  $\vec{e}_x$ , on obtient donc :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (5)$$

Cela correspond à la forme d'équation proposée par l'énoncé en posant  $D = \frac{\eta}{\rho}$ , qui est la viscosité cinématique.

**Q 35.** Pour exprimer les temps demandés, il faut se donner une échelle de longueur  $L$ . L'énoncé aurait pu le préciser, d'autant que dans la question suivantes, on fera intervenir deux échelles de longueur distinctes. Soit  $L$  l'échelle de longueur caractéristique. Les temps de diffusion et de convection sont :

$$\tau_{\text{diff}} = \frac{L^2}{\nu} \quad \text{et} \quad \tau_{\text{conv}} = \frac{L}{v} \quad (6)$$

Leur rapport est

$$\frac{\tau_{\text{diff}}}{\tau_{\text{conv}}} = \frac{L^2}{\nu} \times \frac{v}{L} = \frac{vL}{\nu} = Re \quad . \quad (7)$$

Si  $Re \gg 1$ ,  $T_{\text{diff}} \gg T_{\text{conv}}$  : le transport diffusif de quantité de mouvement est lent, peu efficace, on peut le négliger. Inversement, si  $Re \ll 1$ , la diffusion est très efficace et on néglige la convection.

**Q 36.**

$$\tau_{\text{diff}} = \frac{\delta^2}{\nu} \quad \tau_{\text{conv}} = \frac{L}{U} \quad (8)$$

La condition  $\tau_{\text{diff}} \approx \tau_{\text{conv}}$  donne

$$\frac{\delta^2}{\nu} \approx \frac{L}{U} \quad \delta \approx \sqrt{\frac{L\nu}{U}} \quad \boxed{\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}}} \quad (9)$$

**Q 37.** Prenons  $L = 0,5 \text{ m}$  (larguer d'un cycliste) et  $U = 10 \text{ m.s}^{-1}$  (vitesse typique en vélo). On calcule  $Re = 3,3 \cdot 10^5$  et  $\delta = 0,8 \text{ mm}$ . À vrai dire, il vaudrait peut-être mieux prendre pour  $L$  la longueur du cycliste, mais l'ordre de grandeur serait le même.

**Q 38.** Le nombre de Reynolds est de l'ordre de  $10^5$ .

- Comme  $\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}}$ , on a  $\delta \ll L$  ce qui valide l'hypothèse (1).
- L'incompressibilité du fluide s'exprime par  $\text{div } \vec{v} = 0$ , c'est à dire

$$\frac{\partial u'_x}{\partial x'} + \frac{\partial u'_y}{\partial y'} = 0 \quad \text{d'où on déduit} \quad \left| \frac{\partial u'_x}{\partial x'} \right| = \left| \frac{\partial u'_y}{\partial y'} \right| \quad (10)$$

Les variations longitudinales se font à l'échelle  $L$  et les variations transversales à l'échelle  $\delta$ . Donc

$$\left| \frac{\partial u'_y}{\partial x'} \right| \approx \frac{|u'_x|}{L} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial u'_y}{\partial y'} \right| \approx \frac{|u'_y|}{\delta} \quad (11)$$

Donc

$$\frac{|u'_x|}{L} \approx \frac{|u'_y|}{\delta} \quad \frac{|u'_x|}{|u'_y|} \approx \frac{L}{\delta} \approx \sqrt{Re} \gg 1 \quad \text{cela valide l'hypothèse (2)}. \quad (12)$$

- En ordre de grandeur, dériver par rapport à  $y'$  revient à diviser par  $\delta$  alors que dériver par rapport à  $x'$  revient à diviser par  $L$ . Comme  $L \gg \delta$ , on a pour toute grandeur  $F(x', y')$  :

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x'} \right| \ll \left| \frac{\partial F}{\partial y'} \right| \quad .$$

Cette propriété valide l'hypothèse (3).

**Q 39.** Sur la paroi, les particules sont immobiles donc leur accélération (membre de gauche de l'équation de Navier-Stokes) est nulle. En négligeant  $\vec{g}$ , la projection sur  $\vec{e}_x$  de l'équation de Navier-Stokes donne :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x}(y' = 0) + \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y'^2}(y' = 0) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x'^2} \right) \quad (13)$$

D'après l'hypothèse (3), on peut négliger le second terme dans le membre de droite et écrire

$$\frac{\partial p}{\partial x}(y' = 0) \approx \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y'^2}(y' = 0) \quad .$$

**Q 40.** En A, on voit que  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y'^2} < 0$  donc  $\frac{\partial p}{\partial x}(y' = 0) < 0$ .

En B, on voit un profil de vitesse quasi linéaire au voisinage du solide, donc  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y'^2} = 0$   $\frac{\partial p}{\partial x}(y' = 0) = 0$ .

En C,  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y'^2} > 0$   $\frac{\partial p}{\partial x}(y' = 0) > 0$ .

Le décollement de la couche limite se produit entre B et C, c'est à dire dans la zone où  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y'^2} > 0$ , c'est à dire  $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ .

**Q 41.** On a :  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_e}{\partial x'}$ . Le décollement nécessite donc  $\frac{\partial p_e}{\partial x'} > 0$ . D'après la question 33, au voisinage du cylindre,  $p_e$  diminue de N vers P :  $\frac{\partial p_e}{\partial x'} \leq 0$ , ce qui est incompatible avec le décollement. Au contraire,  $p_e$  augmente de N vers P :  $\frac{\partial p_e}{\partial x'} > 0$  ce qui est compatible avec le décollement.

**Q 42.** Dans la couche limite d'épaisseur  $\delta$ , le débit s'exprime par

$$D_m(x') = \int_0^{\delta(x')} \rho L_t dy' v(x', y') \quad . \quad (14)$$

Dans l'écoulement parfait uniforme, il s'exprime par :

$$D_{me}(x') = \int_0^{\delta(x')} \rho L_t dy' v_e \quad (15)$$

L'écart entre ces deux débits est donc

$$\Delta D_m = D_{me} - D_m = \int_0^{\delta(x')} \rho L_t dy' (v_e - v(x', y')) \quad . \quad (16)$$

En exploitant la définition de  $\delta^*$ , on a donc

$$\delta^* = \frac{1}{\rho L_t v_e} \Delta D_m = \int_0^{\delta(x')} \left( 1 - \frac{v(x', y')}{v_e} \right) dy' \quad . \quad (17)$$

**Q 43.** Dans l'écoulement parfait sur une épaisseur  $\delta(x')$ , le débit est  $D_{me} = \rho L_t \delta(x') v_e$ . On lui retranche le débit perdu pour obtenir le débit réel dans la couche limite :

$$D_m(x') = D_{me} - \Delta D_m = \rho L_t \delta(x') v_e - \rho L_t v_e \delta^*(x') \quad \boxed{D_m(x') = \rho L_t v_e (\delta(x') - \delta^*(x'))} \quad . \quad (18)$$

$$D_m(x) = \rho L_t v_e (b^*(x) - b^*(x)) \quad (19)$$

**Q 44.**

**Q 45.** D'après l'énoncé,  $\frac{dp}{dx'} = \frac{dp_e}{dx'}$ . Dans l'écoulement extérieur, on néglige les effets de viscosité : l'écoulement est parfait, stationnaire et incompressible. Le relation de Bernoulli s'écrit  $p_e(x') + \frac{1}{2} \rho v_e^2(x') = Cste$  ce qui en dérivant donne

$$\frac{dp_e}{dx'} = -\rho v_e \frac{dv_e}{dx'} \quad \text{donc} \quad \frac{dp}{dx'} = -\rho v_e \frac{dv_e}{dx'}$$

En développant le calcul des dérivées dans le résultat de la question 44, on obtient

$$\begin{aligned} \rho v_e^2 \frac{d}{dx'} (\delta - \delta^* - \theta) + 2\rho v_e \frac{dv_e}{dx'} (\delta - \delta^* - \theta) - \rho v_e^2 \frac{d}{dx'} (\delta - \delta^*) - \rho v_e \frac{dv_e}{dx'} (\delta - \delta^*) &= -\delta \frac{dp}{dx'} - \tau_w \\ -\rho v_e^2 \frac{d\theta}{dx'} + \rho v_e \frac{dv_e}{dx'} &= \left[ (\delta - \delta^*) \frac{d\theta}{dx'} \right] = -\delta \frac{dp}{dx'} - \tau_w \end{aligned}$$

On remplace  $\frac{dp}{dx'}$  par  $-\rho v_e \frac{dv_e}{dx'}$  et on divise par  $\frac{-1}{\rho v_e^2}$

$$\frac{d\theta}{dx'} - \frac{1}{v_e} \frac{dv_e}{dx'} [\delta - \delta^* - 2\theta] \frac{d\theta}{dx'} = -\frac{\delta}{v_e} \frac{dv_e}{dx'} + \frac{\tau_w}{\rho v_e^2}$$

qui se réécrit

$$\boxed{\frac{\tau_w}{\rho v_e^2} = \frac{d\theta}{dx'} + \frac{1}{v_e} \frac{dv_e}{dx'} (\delta^* + 2\theta)}$$

**Q 46.** L'annulation de  $\tau_w$  se produit pour  $S(\lambda) = 0$  c'est à dire pour  $\lambda = -0,082$ . Or

$$\lambda = \text{Re} \left( \frac{\theta}{L} \right)^2 \frac{dv_e/v_0}{dx'/L} \quad .$$

On utilise les expressions fournies pour  $\theta/L$  et  $v_e/v_0$  en distinguant deux cas.

— Pour  $0 \leq \frac{x'}{L} \leq 0,1$ ,

$$\lambda = \text{Re} \times \frac{0,039}{\text{Re}} \times 19 = 0,0741 \neq -0,082$$

— Pour  $0, 1 \leq \frac{x'}{L} \leq 1$ ,

$$\lambda = \text{Re} \times \frac{0,075}{\text{Re}} \left( \frac{49,522}{(2 - x'/L)^6} - 1 \right)$$

En résolvant  $\lambda = -0,082$ , on trouve

$$\boxed{\frac{x'}{L} = 0,306} \quad .$$

— La question précédente montre que le décollement de la couche limite se produit dans le premier tiers du dos du cycliste ce qui entraîne une forte dissipation d'énergie. Le casque avec injection d'un flux d'air permet vraisemblablement de repousser plus en aval ce point de décollement pour réduire la dissipation d'énergie. Les éléments fournis par l'énoncé ne sont cependant pas très précis et cette explication reste hypothétique.

— À partir des données fournies, on calcule les vitesses moyennes

$$v_{2016} = 10,8 \text{ m.s}^{-1} \quad v_{2017} = 11,15 \text{ m.s}^{-1}$$

puis les puissances dissipées par frottements (et compensées par un effort du cycliste)  $P = \frac{1}{2} \rho S C_x v^3$

$$P_{2016} = 193 \text{ W} \quad P_{2017} = 212 \text{ W} \quad .$$

L'écart est de 19 W, c'est à dire 10% de la valeur de 2016. L'ordre de grandeur est le même dans la question 13.

## Centrifugation

CCINP

1.

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r} \vec{e}_r & \vec{a} &= \ddot{r} \vec{e}_r & \vec{a}_e &= -\Omega^2 H \vec{P} = \Omega^2 r \cos \alpha \vec{e}_y & \vec{a}_e \cdot \vec{e}_r &= -r \Omega^2 \cos^2 \alpha \\ \vec{a}_c &= 2\Omega \vec{e}_z \wedge \dot{r} \vec{e}_r = -2\Omega \vec{e}_z \wedge \dot{r} (\cos \alpha \vec{e}_y - \sin \alpha \vec{e}_x) & \vec{a}_c &= -2\Omega \dot{r} \cos \alpha \vec{e}_x & \vec{a}_c \cdot \vec{e}_r &= 0 \end{aligned}$$

2. L'équation de la statique des fluides dans référentiel  $\mathcal{R}$  non galiléen s'écrit  $\vec{\nabla} P = \rho \vec{g} - \rho \vec{a}_e$ , c'est à dire

$$\vec{\nabla} P = \rho \vec{g} + \rho r \Omega^2 \cos \alpha \vec{e}_y \quad .$$

3. En projection sur  $\vec{e}_r$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho g \sin \alpha + \rho r \Omega^2 \cos^2 \alpha$$

et en intégrant

$$P = \rho g \sin \alpha r + \frac{\rho}{2} \Omega^2 r^2 \cos^2 \alpha + C \quad .$$

4. La seconde loi de Newton s'écrit

$$\rho_s V \vec{a} = \rho_s V \vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_v - \rho_s V \vec{a}_e - \rho_s V \vec{a}_c$$

avec  $\vec{F}_A = -V \vec{\nabla} P$  et  $\vec{F}_v = k \vec{v}$ . D'après la question 2,  $\vec{\nabla} P = \rho \vec{g} - \rho \vec{a}_e$  donc  $\vec{F}_A = -\rho V \vec{g} + \rho V \vec{a}_e$ . L'équation du mouvement se réécrit

$$\begin{aligned} \rho_s V \vec{a} &= \rho_s V \vec{g} - \rho V \vec{g} + \rho V \vec{a}_e - \rho_s V \vec{a}_e - \rho_s V \vec{a}_c - k \vec{v} \\ \rho_s \vec{a} &= (\rho_s - \rho) \vec{g} + (\rho - \rho_s) \vec{a}_e - \rho_s \vec{a}_c - \frac{k}{V} \vec{v} \quad . \end{aligned}$$

5. En projection sur  $\vec{e}_r$ ,

$$\begin{aligned} \rho_s \ddot{r} &= (\rho_s - \rho) g \sin \alpha + (\rho_s - \rho) \Omega^2 r \cos^2 \alpha - \frac{k}{V} \dot{r} \\ \ddot{r} + \frac{k}{\rho_s V} \dot{r} + \left( \frac{\rho}{\rho_s} - 1 \right) \Omega^2 (\cos^2 \alpha) r &= \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_s} \right) g \sin \alpha \\ \ddot{r} + 2\lambda \dot{r} - \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_s} \right) \Omega^2 (\cos^2 \alpha) r &= \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_s} \right) g \sin \alpha \quad . \end{aligned}$$

6. La position d'équilibre est la solution constante de l'équation précédente.

$$r_e = -\frac{g \sin \alpha}{\Omega^2 \cos^2 \alpha} \quad r_e = -51 \mu\text{m} \quad .$$

Comme  $r_e < 0$ , cette position ne peut pas être observée : elle se trouve au-dessus et à gauche de 0, hors du tube.

7. Écrivons l'équation caractéristique de l'équation différentielle homogène :

$$X^2 + 2\lambda X - q^2 = 0 \quad .$$

Ses racines sont :

$$X_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + q^2} = -\lambda \pm q' \quad .$$

La solution générale de l'équation différentielle complète s'écrit

$$r(t) = Ae^{X_1 t} + Be^{X_2 t} + r_e \quad .$$

Les conditions initiales  $r(0) = r_0$  et  $\dot{r}(0) = 0$  donnent

$$A + B + r_e = r_0 \quad X_1 A + X_2 B = 0$$

ce qui permet de calculer

$$A = \frac{r_0 - r_e}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{q'}\right) \quad B = \frac{r_0 - r_e}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{q'}\right)$$

$$r(t) = r_e + \frac{r_0 - r_e}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{q'}\right) \exp((q' - \lambda)t) + \frac{r_0 - r_e}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{q'}\right) \exp(-(q' + \lambda)t)$$

$$\boxed{r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\lambda t} \left( \cosh q' t + \frac{\lambda}{q'} \sinh q' t \right)} \quad .$$

8. L'instant  $T$  est tel que  $r(T) = r_1$  :

$$r_1 = r_e + \frac{r_0 - r_e}{2} \left[ \left(1 + \frac{\lambda}{q'}\right) e^{(q' - \lambda)T} + \left(1 - \frac{\lambda}{q'}\right) e^{-(q' + \lambda)T} \right]$$

$$\frac{r_1 - r_e}{r_0 - r_e} = \frac{1}{2} \left[ \left(1 + \frac{\lambda}{q'}\right) e^{(q' - \lambda)T} + \left(1 - \frac{\lambda}{q'}\right) e^{-(q' + \lambda)T} \right]$$

$$\boxed{\frac{r_1 - r_e}{r_0 - r_e} = e^{-\lambda T} \left( \cosh q' T + \frac{\lambda}{q'} \sinh q' T \right)}$$

9. En supposant le nombre de Reynolds petit devant 1, la force visqueuse est donnée par la formule de Stokes :  $\vec{F}_v = -6\pi\eta R\vec{v}$ ,  $k = 6\pi\eta$ . On a donc

$$\lambda = \frac{k}{2\rho_s V} = \frac{6\pi\eta}{2\rho_s \frac{4}{3}\pi R^3} \quad \boxed{\lambda = \frac{9\eta}{2\rho_s R^2}} \quad .$$

10. Comme  $r_e \ll r_1$  et  $r_e \ll r_0$ ,  $\frac{r_1 - r_e}{r_0 - r_e} \approx \frac{r_1}{r_0} = 2$ . On cherche sur le graphe l'abscisse du point dont l'ordonnée vaut 2. On trouve  $T = 3.7$  s.

## Hydraulique dans une branche d'arbre

Mines-Ponts

6. L'incompressibilité de l'écoulement s'exprime par  $\text{div } \vec{v} = 0$ , c'est à dire  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  :  $v$  ne dépend pas de  $x$ .



7. Les questions qui suivent étudient l'écoulement de Poiseuille avec un point de vue différent de celui vu en cours. Plutôt que de projeter l'équation de Navier-Stokes, on analyse « à la main » les forces subies par une portion infinitésimale de fluide bien choisie. Le fluide situé au delà de  $r$  est moins rapide et a tendance, par frottement, à ralentir celui situé en deçà de  $r$ . La force  $d\vec{F}$  est donc de sens opposé à  $\vec{u}_x$ . Comme  $\frac{\partial v}{\partial r} < 0$ , on choisit le signe +. La surface latérale de  $\mathcal{S}_r$  a pour aire  $dS = 2\pi r dx$  donc

$$d\vec{F} = \eta \frac{\partial v}{\partial r} \times 2\pi r dx \vec{u}_x \quad .$$

Pendant  $dt$ ,  $\mathcal{S}_r$  avance vers la droite mais chaque particule fluide voyage à  $r$  constant. Comme la vitesse dépend de  $x$  et ne dépend pas de  $r$ , chaque particule fluide a la même vitesse à  $t$  et à  $t + dt$ . La quantité de mouvement de  $\mathcal{S}_r$  ne varie pas.

Le système  $\mathcal{S}_r$  est aussi soumis à des forces de pression à sa droite et à sa gauche. Leur somme vaut :

$$d\vec{F}_p = (\pi r^2 p(x) - \pi r^2 p(x + dx)) \vec{u}_x = -\pi r^2 dp \vec{u}_x \quad .$$

Comme  $\frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{0}$ , la loi de Newton s'écrit

$$\begin{aligned} d\vec{F}_p + d\vec{F} &= \vec{0} \\ \eta \frac{\partial v}{\partial r} \times 2\pi r dx - \pi r^2 dp &= 0 \\ \frac{dp}{dx} &= \frac{2\eta}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \quad . \end{aligned}$$

Le membre de gauche ne dépend que de  $x$ , celui de droite ne dépend que de  $r$ . Comme ils sont égaux pour tout  $x \in [-L, L]$  et tout  $r \in [0, a]$ , ils sont égaux à une seule et même constante  $A$ .

$$\frac{dp}{dx} = A \quad \text{s'intègre en} \quad p = Ax + B \quad .$$

Pour  $p(-R) = p_1$  et  $p(R) = p_2$ , on trouve

$$A = \frac{p_2 - p_1}{2R} \quad \boxed{p = \frac{p_2 - p_1}{2R} x + \frac{p_1 + p_2}{2}} \quad .$$

8. Avec la condition de bord  $v(a) = 0$ ,

$$\frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\eta} A \quad \text{s'intègre en} \quad \boxed{v = \frac{p_2 - p_1}{8\eta R} (r^2 - a^2)} \quad .$$

Le débit est le flux de la vitesse à travers une section du tuyau :

$$D_v = \int \vec{v} \cdot dS \vec{u}_x = \int_0^a \frac{p_2 - p_1}{8\eta R} (r^2 - a^2) \times 2\pi r dr \quad D_v = \frac{\pi a^2}{16\eta R} (p_1 - p_2) \quad .$$

On identifie

$$\boxed{G_H = \frac{\pi a^4}{16\eta R}} \quad .$$

9.

$$\bar{v} = \frac{D_v}{\pi a^2} = \frac{a^2(p_1 - p_2)}{16\eta R}$$

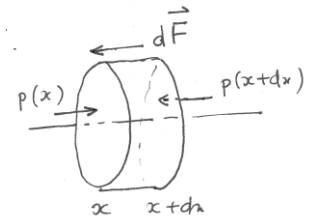
La force de viscosité subie par la tranche de fluide de longueur  $dx$  est celle écrite dans la question 7, évaluée en  $r = a$  puisqu'on considère le fluide jusqu'au bord. Il s'agit de la force visqueuse exercée par le tuyau sur l'eau.

$$d\vec{F} = 2\pi a dx \eta \frac{\partial v}{\partial r}(a) = 2\pi a dx \eta \frac{p_2 - p_1}{8\eta R} \times 2a = \frac{\pi a^2 (p_2 - p_1)}{2R} dx$$

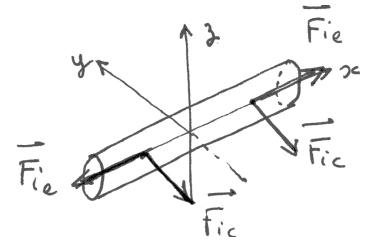
On remarque question

$$dF_x = -8\pi\eta\bar{v}dx \quad .$$

10.  $\bar{v} = 6.10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$   $Re = \frac{\bar{v} \times 2a}{\nu} = 0,24$ . Comme  $Re < 1$ , l'écoulement est laminaire comme on l'a implicitement supposé depuis le départ.



**11.** Force d'inertie d'entraînement volumique :  $\vec{f}_{ie} = \rho\omega^2 x \vec{u}_x$ . Force de Coriolis volumique :  $\vec{f}_{ic} = -2\rho\omega \vec{u}_z \wedge v \vec{u}_x = -2\rho\omega v \vec{u}_y$ . Sur le dessin, on a supposé  $v > 0$ .



**12.** On raisonne le référentiel tournant  $\mathcal{R}_b$ . Plutôt que d'écrire l'équation de Navier-Stokes, on raisonne comme dans la partie I. Le système considéré est ici la portion de fluide située en les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , de volume  $\pi a^2 dx$ . Comme dans la question 7, sa quantité de mouvement reste constante pendant  $dt$  donc la somme des forces qu'il subit est nulle. En projection sur  $\vec{u}_x$ , la force de Coriolis n'intervient pas. On tient compte de la force exercée par la paroi exprimée dans la question 9.

$$\begin{aligned} \pi a^2 p(x) - \pi a^2 p(x + dx) + dF_{ie} + dF &= 0 \\ -\pi a^2 dp + \rho \pi a^2 dx \omega^2 x - 8\pi \eta \bar{v} dx &= 0 \\ \frac{dp}{dx} &= \rho \omega^2 x - \frac{8\eta \bar{v}}{a^2} \quad . \end{aligned}$$

On intègre cette relation avec la condition de bord  $p(R) = p_2$  pour trouver

$$p = \frac{\rho \omega^2}{2} (x^2 - R^2) - \frac{8\eta \bar{v}}{a^2} (x - R) + p_2 \quad .$$

Si on intègre avec la condition de bord  $p(-R) = p_1$ , on obtient

$$p = \frac{\rho \omega^2}{2} (x^2 - R^2) - \frac{8\eta \bar{v}}{a^2} (x + R) + p_1 \quad .$$

L'énoncé considère que la première relation s'applique pour  $x \geq 0$  et la seconde pour  $x \leq 0$ , mais il me semble que *les deux* relations sont valables pour  $x \in [-R, R]$ . En effet, la force d'inertie s'exprime de la même manière, que  $x$  soit positif ou négatif.

**13.** En retranchant membre à membre ces deux relations, on obtient

$$\bar{v} = \frac{a^2}{16\eta R} (p_1 - p_2) \quad .$$

Cette relation s'obtient aussi en évaluant  $p(0)$  à partir de chacune des deux expressions de  $p$  et en identifiant les deux résultats. C'est ce que l'énoncé suggère. En éliminant  $\bar{v}$ , on trouve

$$p(0) = \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{\rho \omega^2 R^2}{2} \quad .$$

On a obtenu pour  $\bar{v}$  la même expression qu'à la question 9. Le débit n'est donc pas modifié par la rotation de la branche et la conductance hydraulique reste inchangée.

**14.** Dans le référentiel tournant, le fluide situé dans le réservoir à droite de  $A_2$  est à l'équilibre et on peut lui appliquer la loi de la statique des fluides en tenant compte de la force d'inertie d'entraînement volumique :

$$\vec{\text{grad}} p = \rho \omega^2 x \vec{u}_x \quad \frac{dp}{dx} = \rho \omega^2 x \quad .$$

On intègre entre  $x = R$  et  $x = L$  :

$$p(R) - p(L) = \frac{\rho \omega^2}{2} (R^2 - L^2) \quad .$$

Comme  $p(R) = p_2$  et  $p(L) = p_0$ ,

$$p_2 = p_0 + \frac{\rho \omega^2}{2} (R^2 - L^2) \quad .$$

On procède de même dans le réservoir situé à gauche de  $A_1$  pour obtenir

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho \omega^2}{2} (R^2 - (L - d)^2) \quad .$$

Par différence membre à membre

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \frac{\rho \omega^2}{2} (L^2 - (L - d)^2) = \frac{\rho \omega^2}{2} (2L - d)d \\ p_1 - p_2 &\simeq \rho \omega^2 L d \quad \text{car } d \ll L \quad . \end{aligned}$$

15. On lit sur la courbe  $\delta_G = 50\%$  pour  $\Delta p = -3 \text{ MPa}$ .

$$\omega = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{-\Delta p}{\rho}} = 183 \text{ rad.s}^{-1} \quad p_1 - p_2 = 1,0 \text{ bar} \quad .$$

Lorsque des bulles sont présentes dans le gaz, elle modifient sans doute le profil de vitesse, mais cet effet est difficile à analyser. Il est cependant évident qu'elles occupent une partie du volume du tuyau ; le volume disponible pour le liquide se trouve réduit et donc le débit aussi. La conductance hydraulique est donc abaissée.