PC* 25 - DEVOIR N° 11

corrigé

Effet Marangoni

I Larmes du vin

1. L'élément considéré est soumis à $\vec{F}_1 = \gamma(y+dy)\ell\vec{u}_y$ de la part du fluide supérieur et à $\vec{F}_2 = -\gamma(y)\ell\vec{u}_y$ de la part du fluide inférieur.

$$d\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (\gamma(y+dy) - \gamma(y))l\vec{u}_y = l\,d\gamma\,\vec{u}_y = l\,c\,dy\,\vec{u}_y$$

Comme $dS = l\,dy$, on a $d\vec{F} = c\,dS\,\vec{u}_y$.

2. La loi de Newton donne $d\vec{F}_{\text{visq}} = -\gamma\frac{\partial v}{\partial x}(h,y)\,dS\,\vec{u}_y$. Les forces de pression ont pour somme $d\vec{F}_P = (P(h,y) - P_0)dS\vec{u}_x$.

3. Comme cet élément est de masse nulle, le PFD s'écrit $\sum\vec{F} = 0$ c'est-à-dire $d\vec{F} + d\vec{F}_{\text{visq}} + d\vec{F}_P = \vec{0}$. En projetant, on obtient :

$$\begin{cases} c\,dS - \gamma\frac{\partial v}{\partial x}(h,y)\,dS = 0 \\ (P(h,y) - P_0)\,dS = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x}(h,y) = \frac{c}{\gamma} \\ P(h,y) = P_0 \end{cases} .$$

4. L'accélération est donnée par $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$.

— l'écoulement est stationnaire : $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$;

— $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}) = v\frac{\partial}{\partial y}$ et $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = v\frac{\partial}{\partial y}(v(x)\vec{u}_y) = \vec{0}$ car $\vec{v}$ ne dépend pas de y.

Donc $\vec{a} = \vec{0}$ partout dans cet écoulement.

5. Comme $\frac{D\vec{v}}{Dt} = 0$, l'équation de Navier-Stokes s'écrit $\vec{0} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}$ avec $\Delta\vec{v} = \frac{d^2v}{dx^2}\vec{u}_y$. En projection on obtient

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g + \eta\frac{d^2v}{dx^2} \end{cases} . \qquad (1)$$

6. En intégrant la première des relations (1), on obtient $P(x,y) = K(y)$ et grâce à $P(h,y) = P_0$, on trouve $K(y) = P_0$ donc $P(x,y) = P_0$.

7. En $x = 0$, la condition d'adhérence du fluide visqueux donne $v(0) = 0$. En $x = h$, on a d'après la question 3 : $\frac{\partial v}{\partial x}(h) = \frac{c}{\eta}$.

8. La seconde ligne des relations (1) s'intègre en $v = \frac{\rho g}{\eta}\frac{x^2}{2} + Ax + B$. Comme $v(0) = 0$, $B = 0$. Comme $\frac{dv}{dx}(h) = \frac{c}{\eta}$, $\frac{\rho g}{\eta}h + A = \frac{c}{\eta}$ donc $A = \frac{c}{\eta} - \frac{\rho gh}{\eta}$ et

$$\boxed{v = \frac{\rho g}{2\eta}x^2 + \left(\frac{c}{\eta} - \frac{\rho gh}{\eta}\right)x} .$$

9. $D_v = \int_0^h v(x)\ell\,dx = \frac{\ell h^3}{\eta}\left(\frac{c}{2} - \frac{\rho gh}{3}\right)$.

10. $D_v > 0$ si et seulement si $c > c_{\text{lim}}$ avec $\boxed{c_{\text{lim}} = \frac{2}{3}\rho gh}$.

11. Pour $c = c_{\text{lim}}$,

$$v = \frac{\rho g}{2\eta}(x^2 - \frac{2}{3}xh) = \frac{\rho g}{\eta}x\left(\frac{x}{2} - \frac{h}{3}\right) .$$

Cette vitesse v s'annule pour $x = \frac{2}{3}h$ et passe par un minimum pour $x = h/3$. La nullité du débit s'exprime par le fait que l'aire sous la partie négative de la courbe possède la même valeur absolue que l'aire sous la partie positive. Près de l'interface, le fluide est tiré vers le haut par le gradient de tension superficielle. Plus loin de l'interface, c'est l'effet gravitaire qui domine et le fluide descend.

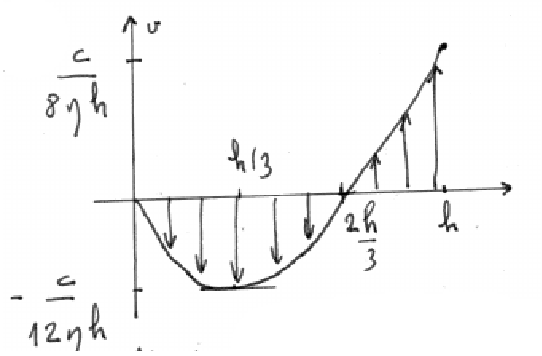

FIGURE 1 – Graphique de v en fonction de x.

II Effet Marangoni thermique

1. $c = \frac{d\gamma}{dx} = -b\gamma_0 \frac{dT}{dx}$.

2. Il suffit d'adapter les relations de la question 3 en inversant les rôles respectifs des coordonnées x et y.

$$P(x,h) = P_0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(h) = \frac{c}{\eta}$$

3. En pojection, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = -\partial_x P + \eta \frac{d^2 v}{dy^2} \\ 0 = -\partial_y P - \rho g \end{cases}$$

En tenant compte de la condition de bord $P(x,h) = P_0$, la projection selon $\vec{u}_y$ s'intègre en $P = P_0 - \rho g(y-h)$. Comme $\partial_x P = 0$, la première projection devient $\frac{d^2v}{dy^2} = 0$ et s'intègre en $v = Ay + B$. Comme $v(0) = 0$, $B = 0$ et l'autre condition de bord donne $A = \frac{c}{\eta}$. Finalement $\boxed{v = \frac{c}{\eta} y}$.

Comme $c = -\gamma_0 b \frac{dT}{dx}$, v est de signe opposé à dT/dx. L'écoulement se fait vers la région froide.

4. Comme dans la question 3, $P = P_0 - \rho g(y-h)$ mais h dépend ic de x. On a bien un gradient de pression selon $\vec{u}_x$:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{dh}{dx} \quad .$$

5. La projection de l'équation de Navier-Stokes sur $\vec{u}_x$ s'écrit $\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{\rho g}{\eta}\frac{dh}{dx}$ et s'intègre en $v = \frac{\rho g}{2\eta}\frac{dh}{dx} y^2 + Dy + D'$. L'adhérence en $y = 0$ donne $D' = 0$.

6. Le débit vers la droite est $D_v = \int_0^h l v(y)\, dy$.

$$D_V = l\left[\frac{\rho g}{2\eta}\frac{dh}{dx}\frac{h^3}{3} + \frac{Dh^2}{2}\right]$$

L'écoulement en profondeur compense l'effet Marangoni si $D_v = 0$ c'est-à-dire si

$$\boxed{D = -\frac{\rho g h}{3\eta}\frac{dh}{dx}} \quad .$$

7. La condition de bord $\partial_y v(h) = c/\eta$ évaluée avec $h \simeq h_0$ donne

$$\frac{\rho g}{\eta}\frac{dh}{dx} h_0 + D = \frac{c}{\eta} \quad .$$

En éliminant D, on trouve

$$\frac{dh}{dx} = \frac{3}{2}\frac{c}{\rho g h_0} x \qquad \text{puis} \qquad \boxed{\frac{dh}{dx} = -\frac{3}{2}\frac{b\gamma_0}{\rho g h_0}\frac{dT}{dx}} \quad .$$

8.

$$\frac{dh}{dx} = 0{,}0525 \qquad \alpha = \arctan(0{,}0525) = 3.0°$$