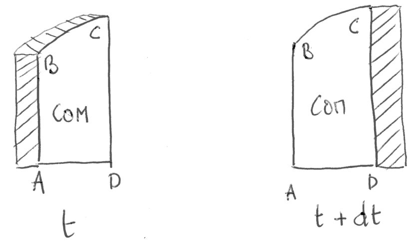
PC* 25 - DEVOIR N° 13

corrigé

Aérodynamique d'un casque de vélo

question 44 seule

Cette question est assez difficile, ce qu'on devine en observant la forme de l'équation à obtenir. À l'instant



t, la quantité de mouvement du système considéré comprend celle de la zone commune, celle $dP(x')$ de la portion qui entre par la face AB et celle du fluide qui entre par la face BC. À l'instant $t+dt$, elle comprend celle de la partie commune et celle $dP(x'+dx')$ de la portion qui est sortie par la face CD. En projection sur $\vec{u}'_x$, la variation de quantité de mouvement pendant dt s'écrit donc :

$$\begin{aligned} P_{x'}(t+dt) - P_{x'}(t) &= P_{\text{com}} + dP(x'+dx') - (P_{\text{com}} + dP(x') + dP_{\text{sup}}) \\ \frac{dP_{x'}}{dt} &= \frac{dP(x'+dx') - dP(x')}{dt} - \frac{dP_{\text{sup}}}{dt} = \frac{dP(x')}{dt} - \frac{dP_{\text{sup}}}{dt} \quad . \end{aligned}$$

En utilisant l'expression que l'énoncé fournit pour $dP(x')$, on obtient

$$\frac{dP_{x'}}{dt} = \rho L_t \, d\left(w_e^2\left(\delta(x') - \delta^*(x') - \theta(x')\right)\right) - \frac{dP_{\text{sup}}}{dt}$$

Dans ces expressions, dP_{sup} est la quantité de mouvement de fluide qui entre par la face supérieure pendant dt. Dans cette zone, la vitesse est v_e donc $dP_{\text{sup}} = dm_{e\,\text{sup}} v_e$. Pour exprimer $dm_{e\,\text{sup}}$, on exploite le bilan de masse qui s'écrit ici $dm_e + dm_{e\,\text{sup}} = dm_s$ donc

$$dm_{e\,\text{sup}} = dm_s - dm_e = D_m(x'+dx')dt - D_m(x')dt = dD_m \times dt.$$

On utilise l'expression de D_m vue dans la question 43, on obtient

$$\frac{dP_{\text{sup}}}{dt} = \rho v_e L_t d\left((\delta - \delta^*)v_e\right) \quad .$$

En projection sur $\vec{e}'_x$, la résultante des forces $R_{x'}$ que subit ce système est constituée des forces de frottement sur la paroi, les forces de pression sur les faces AB et CD, et des forces de pression sur BC.

$$\begin{aligned} R_{x'} &= -L_t\tau_w dx' + p(x')L_t\delta(x') - p(x'+dx')L_t\delta(x'+dx') + L_t p(x')d\delta \\ &= -L_t\tau_w dx' - L_t d(p\delta) + L_t p d\delta = -L_t\tau_w dx' - L_t\delta dp - L_t p d\delta + L_t p d\delta \\ &= -L_t\tau_w dx' - L_t\delta(x')dp \quad . \end{aligned}$$

La seconde loi de Newton s'écrit $dP_{x'}/dt = R_{x'}$ et, en divisant par $L_t\,dx'$, cela donne

$$\rho\,\frac{d\left(v_e^2\left(\delta(x') - \delta^*(x') - \theta(x')\right)\right)}{dx'} - \rho v_e \frac{d\left((\delta - \delta^*)v_e\right)}{dx'} = -\tau_x - L_t\delta(x')\frac{dp}{dx'} \quad .$$

La masse volumique ρ est ici une constant et cette relation équivaut à celle proposée par l'énoncé.

Lutte contre les incendies de forêt

❑ **1 –** Question de cours

❑ **2 –** Le volume entrant est $D_v t$ et le volume final $L^2 h_0$. Comme l'eau est incompressible, $D_v t = L^2 h_0$ et $h_0 = D_v t / L^2 = 65\,\mathrm{cm}$.

❑ **7 –** Comme l'eau s'écoule vers l'arrière, dans le sens de $-\vec{e}_x$, on a $\vec{v} = -v(x,t), \vec{e}_x$ avec $v > 0$. Comme l'eau est incompressible $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ donc $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$: v ne dépend pas de x et donc est de la forme $v(x,t) = v(t)$.

❑ **8 –** $\vec{v}.\vec{\nabla} = -v\frac{\partial}{\partial x}$ et $(\vec{v}.\vec{\nabla})\,\vec{v} = v\frac{\partial v(t)\,\vec{e}_x}{\partial x} = 0$. L'équation d'Euler s'écrit donc, en projection sur $\vec{e}_x$,

$$\rho\frac{\partial(-v)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad .$$

Le membre de gauche ne dépend pas de x. En intégrant entre $x = -(L+\ell)$ et $x = -L$, on obtient

$$-\rho\ell\frac{\partial v}{\partial t} = -p(-L) + p(-L+\ell) \quad . \tag{1}$$

Le tuyau débouche sur l'air ambiant donc $p(-(L+\ell)) = p_0$. Bien que la vitesse évolue au fil du temps, elle reste très faible dans le réservoir dont la section est bien plus grande que celle du tuyau. Elle varie sans doute assez peu et on peut supposer l'écoulement quasi-stationnaire pour appliquer la relation de Bernoulli. En prenant une ligne de courant reliant la surface à l'entrée du tuyau de vidange, on a :

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho\dot{h}^2 + \rho g h_0 = p(-L) + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g \times 0 \quad .$$

Durant ce régime, h est supposé constant égal à h_0, donc $\dot{h} = 0$. On en déduit $p(-L) = p_0 + \rho g h_0 - \rho v^2/2$. En éliminant $p(-L)$ dans (1), on obtient

$$-\rho\ell\frac{dv}{dt} = \frac{\rho v^2}{2} - \rho g h_0 \qquad \ell\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} = k^2 \qquad \text{avec} \quad \boxed{k = \sqrt{g h_0}} \quad .$$

❑ **9 –** Une solution constante est telle que $dv/dt = 0$. Elle vaut $v_0 = \sqrt{2k} = \sqrt{2gh_0}$: c'est la vitesse en régime permanent donnée par la relation de Torricelli. L'équation se réécrit

$$\ell\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} \qquad \frac{v}{v_0^2 - v^2} = \frac{dt}{2\ell} \quad .$$

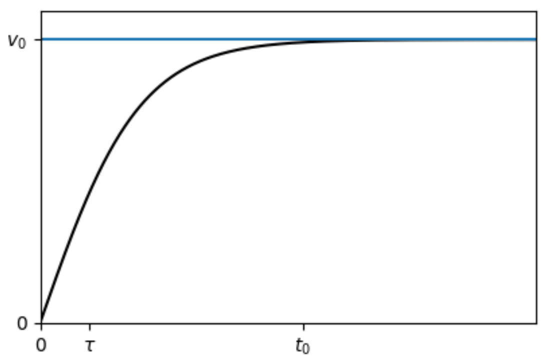
On intègre membre à membre entre $(t = 0, v = 0)$ et $(t, v(t))$ pour obtenir

$$\frac{1}{2v_0}\ln\frac{v_0 + v}{v_0 - v} = \frac{t}{2\ell} \quad \text{puis} \quad \ln\frac{v_0 + v}{v_0 - v} = \frac{t\,v_0}{\ell} = \frac{t}{\tau} \qquad \text{avec} \quad \tau = \frac{\ell}{v_0} = \frac{\ell}{\sqrt{2gh_0}} \quad .$$

En passant à l'exponentielle, on trouve

$$v(t) = v_0\frac{e^{t/\tau} - 1}{e^{t/\tau} + 1} \qquad \boxed{v_0 = \frac{1 - e^{-t/\tau}}{1 + e^{-t/\tau}}} \quad .$$

Pour $t \to \infty$, la vitesse tend vers v_0 : on atteint asymptotiquement le régime permanent.



❑ **10 –** On calcule $v_0 = 3,57\,\mathrm{m.s^{-1}}$, $\tau = 0,22\,\mathrm{s}$ On résout $v(t_0) = 0,99 v_0$ et on obtient

$$t_0 = \tau \ln(199) = 1,19\,\mathrm{s} \quad .$$

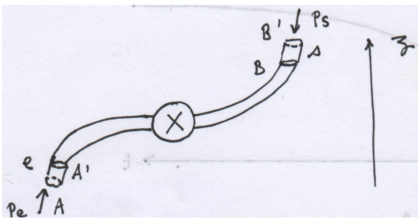
❑ **11 –** Le temps de vidange du réservoir est sans doute de plusieurs minutes, donc très supérieur à τ. On peut donc négliger la durée du régime transitoire. Cependant, h ne reste pas égal à h_0 mais diminue. À chaque nouvelle valeur de h correspond une nouvelle valeur de τ. On suppose que τ reste « assez faible », c'est à dire que h varie peu pendant la durée $\tau(h)$. Dans ces conditions, le régime est quasi permanent et on peut écrire à tout instant $v \simeq \sqrt{2gh}$. Le débit sortant est $D_v = s\sqrt{2gh}$ et le bilan de volume s'écrit

$$L^2 \frac{dh}{dt} = -D_v = -s\sqrt{2gh} \qquad L^2 \frac{dh}{\sqrt{h}} = -s\sqrt{2g}\,dt \quad .$$

En intégrant membre à membre entre $(t = 0, h = h_0)$ et $(t_v, h = 0)$, on obtient

$$-2L^2\sqrt{h_0} = -s\sqrt{2g}\,t_v \qquad \boxed{t_v = \frac{L^2}{s}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}} \quad \text{avec} \quad s = \pi\delta^2/4 \qquad \boxed{t_v = 1045\,\mathrm{s} = 17\,\mathrm{min}\,26\,\mathrm{s}} \quad .$$

❑ **12 –** Il s'agit d'un bilan d'énergie mécanique sur un système ouvert. La surface de contrôle enserre l'eau dans la citerne et l'eau dans le tuyau et la motopompe. On se ramène, entre les instants t et $t + dt$ à un système fermé. Comme le système est en régime permanent, la même masse $\delta m = \rho D_v dt$ entre et sorte aux deux extrémités pendant dt.



$$E_m(t) = E_{m\,\mathrm{com}}(t) + \delta E_m(AA') = E_{m\mathrm{com}}(t) + \frac{1}{2}\delta m v_e^2 + \delta m g z_e$$
$$E_m(t + dt) = E_{m\,\mathrm{com}}(t + dt) + \delta E_m(BB'') = E_{m\mathrm{com}}(t + dt) + \frac{1}{2}\delta m v_s^2 + \delta m g z_s$$

Comme le régime est permanent, $E_{m\,\mathrm{com}}(t) = E_{m\,\mathrm{com}}(t + dt)$ et

$$dE_m = E_m(t + dt) - E_m(t) = \delta m \left(\frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \right)$$

Pendant dt, le sytème reçoit

- le travail $\mathcal{P} dt$ de la pompe ;
- un travail des forces intérieurs nul, car le fluide est non visqueux et incompressible ;
- le travail des forces de pression aux deux extrémités δW_p ;
- le travail des forces de pression au contact des parois du tuyau $\delta W_p'$.

Le fluide non visqueux s'écoule tangentiellement aux parois alors que les forces de pression sont perpendiculaires aux parois, donc ces forces développent une puissance nulle. Le travail de pression δW_p aux extrémités se calcule par $\delta W_p = p_e \delta V_e - p_s \delta V_s$, avec $\delta V_s = \delta V_e = D_v dt$. Le théorème de l'énergie mécanique $dE_m = \sum \delta W$ donne ici

$$\rho D_v dt \left(\frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \right) = \mathcal{P} dt + (p_e - p_s) D_v dt$$

$$\boxed{\mathcal{P} = \rho D_v \left(\frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) + \frac{p_s - p_e}{\rho} \right)} \quad .$$

❑ **13 –** L'entrée se trouve à la surface du réservoir, à pression atmosphérique, et l'eau sort à la pression atmosphérique. Donc $p_e = p_s = p_0$. En négligeant la hauteur d'eau dans le réservoir devant $h = 20\,\text{m}$, on a $z_s - z_e = 20\,\text{m}$. De plus, la conservation du débit s'écrit $D_v = L^2 v_e = \pi d_2^2/4 v_s$ et, au vu des valeurs numériques, on en déduit $v_s \gg v_e$.

$$\mathcal{P} \simeq \rho \frac{\pi d_2^2}{4} v_s \left(\frac{v_s^2}{2} + gh \right) \quad .$$

Pour résoudre numériquement cette équation de degré 3, il suffit d'exécuter les lignes de code suivantes. On obtient $v_s = 19,6\,\text{m.s}^{-1}$.

```
from scipy.optimize import fsolve

def bilan_puissance(v) :
    return P - rho * np.pi * d2**2 / 4 * v * (v**2/2 + g * h)

vs = fsolve(bilan_puissance, 10)
```

❑ **14 –** a) La surface de contrôle s'étend entre les sections de diamètre d_1 et d_2. On se ramène à nouveau à un système fermé pour lequel le bilan de quantité de mouvement donne, en régime permanent et en projection sur $\vec{u}_x$,

$$\frac{dP}{dt} = D_m(v_2 - v_2) \quad \text{avec} \quad D_m = \rho S_2 v_2.$$

D'après le principe des actions réciproques, le système considéré est soumis à $-F_e$ de la part de l'embout. Il subit aussi $S_1 p_1 \vec{u}_x$ et $-S_2 p_2 \vec{u}_x$. Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit

$$\rho S_2 v_2 (v_2 - v_1) = -F_e + p_1 S_1 - p_2 S_2 \qquad F_e = \rho S_2 v_2 (v_1 - v_2) + p_1 S_1 - p_2 S_2 \quad .$$

Par conservation du début, $v_1 = S_2 v_2 / S_1$ donc

$$\boxed{F_e = \rho S_2 v_2^2 (S_2/S_1 - 1) + p_1 S_1 - p_2 S_2} \quad .$$

b) En suivant une ligne de courant de l'entrée vers la sortie, on obtient $p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$.

$$\boxed{p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 (1 - S_2^2/S_1^2)} \quad .$$

c) L'air ambiant agit sur la face externe de l'embout. Pour obtenir la résultante des forces de pression projetée sur $\vec{u}_x$, on peut remplacer la partie inclinée par une surface verticale d'aire $S_1 - S_2$. L'air exerce donc $-p_0(S_1 - S_2)\,\vec{u}_x$. Donc $F'_e = F_e - p_0(S_1 - S_2)$. Comme $p_0 = p_2$, on a

$$\begin{aligned} F'_e &= \rho S_2 v_2^2 (S_2/S_1 - 1) + p_1 S_1 - p_2 S_2 - p_2 (S_1 - S_2) \\ &= \rho S_2 v_2^2 (S_2/S_1 - 1) + (p_1 - p_2) S_1 \\ &= \rho S_2 v_2^2 (S_2/S_1 - 1) + \frac{1}{2}\rho v_2^2 (1 - S_2^2/S_1^2) S_1 \\ &= \rho v_2^2 (S_2/S_1 - 1) \left(S_2 - \frac{S_1}{2}(1 + S_2/S_1 \right) \\ &= \rho v_2^2 (S_2/S_1 - 1)(S_2/2 - S_1/2) \qquad \boxed{F'_e = \rho v_2^2 \frac{(S_2 - S_1)^2}{2S_1}} \quad \boxed{F'_e = 105\,\text{N}} \quad .\text{‘} \end{aligned}$$

❑ **17 –** Dans le référentiel de l'avion, l'eau s'engouffre dans les soutes avec une vitesse V et un débit $D_v = s_a V$. Le temps de remplissage est donné par $t_r = \frac{V_{\text{soute}}}{D_v} = 12\,\text{s}$. Pendant ce temps l'avion parcourt la distance $d_r = V t_r = 400\,\text{m}$.

❑ **18 –** Dans le référentiel de l'avion, l'écoulement est stationnaire, parfait et incompressible. L'eau entre à la vitesse $-V\,\vec{e}_x$ et sort à la vitesse $\vec{V}_s$ inconnue. Entre l'entrée et la sortie, la relation de Bernoulli s'écrit

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g \times 0 = p_s + \frac{1}{2}\rho V_s^2 + \rho g z_s \quad .$$

La pression atmosphérique règne dans la soute : $p_s = p_0$. L'énoncé donne $z_s = 50\,\mathrm{cm}$ donc $gz_s = 5\,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2}$, valeur négligeable de V^2 car $V = 120\,\mathrm{km/h} = 33\,\mathrm{m.s}^{-2}$ et $V^2 = 1.10^3\,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2}$. En négligeant le terme $\rho g z_s$, l'équation de Bernoulli donne $V^2 = V_s^2$ donc $V = V_s$. Comme l'eau est incompressible, le débit volumique se conserve $V s_a = V_s s_s$ donc $s_s = s_a$.

Un bilan de quantité de mouvement et l'application de la seconde loi de Newton dans le référentiel de l'avion donne

$$D_m(V_s\,\vec{e}_x - V\,\vec{e}_x) = -\vec{F} \quad \text{donc} \quad \vec{F} - 2D_m V\,\vec{u}_x = -2\rho s_a V^2\,\vec{e}_x \quad .$$

On calcule $|\vec{F}| = 17\,\mathrm{kN}$ et sa puissance $P = -FV = -568\,\mathrm{kW}$. Pour ne pas ralentir, le pilote doit demander davantage de puissance à son moteur durant la phase d'écopage.