Chapitre 12 — intégrales dépendant d'un paramètre

1 Rappel : théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I. On fait les hypothèses suivantes.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux.
2. Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I (et indépendante du paramètre n) vérifiant la domination
$$\forall n \geqslant n_0, \quad \forall t \in \mathrm{I}, \qquad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t).$$

On peut alors affirmer que les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I et que la suite de terme général $\int_{\mathrm{I}} f_n$ converge vers $\int_{\mathrm{I}} f$ (on peut passer à la limite sous l'intégrale).

2 Théorème de continuité sous l'intégrale

Soient A et I deux intervalles (l'intervalle A est l'ensemble des paramètres ; l'intervalle I est celui sur lequel on intègre). Soit f une fonction définie sur $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout t dans I, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A.
2. Pour toute valeur du paramètre x dans A, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I.
3. Il existe une fonction φ intégrable sur I et indépendante du paramètre x vérifiant la domination
$$\forall x \in \mathrm{A}, \qquad \forall t \in \mathrm{I}, \qquad |f(x, t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors on peut affirmer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(x, t)\, \mathrm{d}t$ est (définie et) continue sur A.

Version assouplie : on peut se contenter de prouver que F est et continue sur chaque segment inclus dans A.

Exemple : la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$ est continue sur $]0, +\infty[$.

3 Théorème de convergence dominée à paramètre continu

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit a une borne de A. Soit f une fonction définie sur $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$. Soit ℓ une fonction continue par morceaux sur I.
On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout t dans I, $f(x, t)$ tend vers $\ell(t)$ quand x tend vers a.
2. Pour toute valeur du paramètre x dans A, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I.
3. Il existe une fonction φ intégrable sur I et indépendante du paramètre x vérifiant la domination
$$\forall x \in \mathrm{A}, \qquad \forall t \in \mathrm{I}, \qquad |f(x, t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction ℓ est intégrable sur I et $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x, t)\, \mathrm{d}t$ tend vers $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} \ell(t)\, \mathrm{d}t$ quand x tend vers a.

Exemple (question 1 du sujet X-ENS PC 2014) : montrer que $\displaystyle\int_0^d x \mathrm{e}^{-tx} g(t)\, \mathrm{d}t$ tend vers $g(0)$ quand x tend vers $+\infty$.

4 Théorème de dérivation sous l'intégrale

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour toute valeur du paramètre x dans A, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle I.
2. Pour tout t dans I, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle A.
3. Pour tout x dans A, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur l'intervalle I.
4. Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle I (et indépendante du paramètre x) vérifiant la domination
$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad \forall t \in \mathrm{I}, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle A et sa dérivée s'obtient en dérivant sous l'intégrale
$$\forall x \in \mathrm{A}, \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

Version assouplie : on peut se contenter de montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment K inclus dans I.

Généralisation aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Exemple de la fonction Γ (méthode par récurrence).

5 Théorème de dérivation sous l'intégrale, version étendue

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction définie sur $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout t dans I, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle A.
2. Pour toute valeur du paramètre x dans A, pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle I.
3. Pour tout x dans A, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur l'intervalle I.
4. Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle I (et indépendante du paramètre x) vérifiant la domination
$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad \forall t \in \mathrm{I}, \qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle A et ses k premières dérivées s'obtiennent en dérivant sous l'intégrale
$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad \forall x \in \mathrm{A}, \quad \mathrm{F}^{(j)}(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

Programme de colles n° 8 (du lundi 20 au vendredi 31 janvier 2025)

Tout ce chapitre. Il n'est pas interdit de revenir aussi sur le théorème de convergence dominée et les théorèmes d'intégration terme à terme.

S'il reste du temps, on peut éventuellement aussi évoquer le chapitre 11, consacré aux familles sommables.
