

Exercice 1. (*) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \quad ; \quad a_n = (\sqrt{n})^{-\sqrt{n}} \quad ; \quad a_n = e^{i \ln(\ln(n))} \quad ; \quad a_n = \exp(n^\alpha) \quad ; \quad a_n = e^{(n+1)^2} - e^{(n-1)^2} \quad ; \quad a_n = n^{(-1)^n}.$$

Exercice 2. (*) Prouver l'égalité $\text{rayon}(\sum u_n z^n) = \min(\text{rayon}(\sum u_{2p} z^{2p}), \text{rayon}(\sum u_{2p+1} z^{2p+1}))$.

Exercice 3. (*) On fixe a et b dans \mathbb{R} avec $0 < a < b$. Pour tout p dans \mathbb{N} , on pose

$$c_{2p} = a^p \quad \text{et} \quad c_{2p+1} = b^p.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ puis exprimer sa somme.

Exercice 4. (*) Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers dans l'intervalle $[[1, n]]$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \sqrt{\pi(n)} z^n$.

Exercice 5. ()** On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Encadrer H_n entre deux puissances de n et en déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} H_n x^n$.

b. En reconnaissant un produit de Cauchy, exprimer sa somme sur $] -R, R[$.

c. On admet l'encadrement $0 \leq H_n - \ln(n) \leq 1$. En déduire un équivalent de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ quand x tend vers 1.

Exercice 6. (*) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^p \frac{z^n}{n!}.$$

a. Exprimer $S_{p+1}(z)$ en fonction de $S_0(z), \dots, S_p(z)$.

b. Calculer $S_p(z)$ pour tout $p \in [[0, 3]]$.

Exercice 7. (*) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$. Idem avec $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(2n+1)!}$.

Exercice 8. ()** Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$. Généraliser.

Exercice 9. ()** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$.

Exercice 10. ()** Pour tout n dans \mathbb{N} , on pose $a_n = \int_0^1 (1+t^2)^n dt$.

a. Pour tout c dans $]0, 1[$, prouver la minoration $a_n \geq (1-c)(1+c^2)^n$.

b. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

c. Exprimer sa somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 11. (*) Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ est développable en série entière sur \mathbb{R} puis déterminer son développement au moyen d'une équation différentielle.

Exercice 12. ()** On considère deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$, dont on note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs.

Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n b_n z^n$ vaut au moins $R_a R_b$.

Donner un exemple où R vaut $R_a R_b$ et un exemple où ça n'est pas le cas.

Exercice 13. ()** Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on note I_n le nombre d'involutions de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$, c'est-à-dire le nombre d'applications $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $f \circ f = \text{Id}$. Par convention, on pose $I_0 = 1$.

a. Calculer I_1, I_2, I_3 .

b. (***) Pour tout entier $n \geq 3$, prouver la relation $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$ et vérifier qu'elle est encore valable pour $n = 2$.

c. Pour tout n dans \mathbb{N} , prouver la majoration $I_n \leq n!$ et en déduire que la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$$

est définie sur $] -1, 1[$.

d. Pour tout x dans $] -1, 1[$, trouver un lien entre $f'(x)$ et $f(x)$.

e. En déduire une expression de $f(x)$ puis une expression de I_n sous forme d'une somme.

Exercice 14. ()** Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on note T_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments (par convention, on pose $T_0 = 1$).

a. (***) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer la relation $T_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_k$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer la majoration $T_n \leq n^n$.

c. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{T_n}{n!} x^n$. Montrer qu'il est strictement positif.

d. On définit sur $] -R, R[$ la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{n!} x^n$.

Trouver une relation entre f' et f et en déduire une expression de f .

e. En déduire une expression de T_n sous forme d'une somme de série qu'on ne cherchera pas à simplifier.

Exercice 15. ()** Soit f une fonction dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose qu'il existe λ dans $]0, 1[$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\lambda x).$$

a. Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et calculer $f^{(k)}(0)$ pour tout k dans \mathbb{N} .

b. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que f est développable en série entière sur \mathbb{R} .

c. (***) Pour tout $\alpha > 0$, montrer les relations $x^\alpha = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(f(x))$ et $f(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(e^{\alpha x})$.

Exercice 16. (*)** Étant donné une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $\sqrt[n]{|a_n|} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$;

(ii) la série entière $\sum_{n \geq 0} n! a_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif.