Courants électriques

1. Corrigé : Modèle de Drude probabiliste

1. En intégrant la seconde loi de Newton appliqué à l'électron soumis seulement au champ électrique constant, on obtient

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{q\,(t-t_0)\,\vec{E}}{m} \quad .$$

2. À l'issue d'une collision, la vitesse $\vec{v}_0$ est aléatoire et toutes les directions sont équiprobables, donc $<\vec{v}_0>=\vec{0}$. En moyennant la relation précédente, on obtient donc

$$<\vec{v}>=\frac{q\,\tau\,\vec{E}}{m} \quad .$$

3. Le vecteur densité de courant est lié à la moyenne des vitesses des électrons dans un volume mésoscopique :

$$\vec{j} = nq<\vec{v}>=\frac{nq^2\,\tau\,\vec{E}}{m} \quad .$$

Par identification de cette relation à la loi d'Ohm, on trouve

$$\boxed{\gamma = \frac{nq^2\tau}{m}} \quad .$$

4. a) L'électron ne subit pas de collision sur l'intervalle $[0, t+dt]$ s'il n'en subit pas sur $[0, t]$ ET pas non plus pendant $[t, t+dt]$. Ces deux événements étant indépendants, on en déduit

$$\Pi(t+dt) = \Pi(t) \times (1 - \frac{dt}{\tau}) \quad .$$

b) À partir de la relation précédente, on trouve

$$\frac{d\Pi}{dt} + \frac{1}{\tau}\,\Pi(t) = 0 \quad ,$$

équation différentielle qui s'intègre, compte tenu de la condition initiale $\Pi(0) = 1$, en

$$\Pi(t) = e^{-t/\tau} \quad .$$

c) L'électron subit sa première collision durant $[t, t+dt]$ s'il n'en a pas subit pendant $[0, t]$ ET s'il en subit une pendant dt. La probabilité correspondante est $dP = \Pi(t) \times dt/\tau$. On peut dire aussi que par définition, $dP = -d\Pi$, ce qui donne le même résultat.

d)

$$<t>=\int_0^{\infty} t\,\frac{\Pi(t)}{\tau}dt = \int_0^{\infty}\frac{t}{\tau}e^{-t/\tau}dt = \tau\int_0^{\infty} ue^{-u}du \quad \text{par le changement de variable}\, u = t/\tau \quad .$$

Une intégration par parties donne $\boxed{<t>=\tau}$.
Dans la question 2, on a affirmé que $<t-t_0>=\tau$, mais alors t était fixé et t_0, date de la dernière collision, était la variable aléatoire ; $t-t_0$ représentait la durée écoulée depuis la dernière collision. Dans la question 4c, t est la durée écoulée jusqu'à la prochaine collision depuis l'instant initial. Il se trouve que ces deux durées ont la même espérance, ce que je ne trouve pas cela évident ! Voici une tentative de justification. À partir de $\Pi(t)$, un changement de l'origine des temps permet d'affirmer que $e^{-(t-t_0)/\tau}$ est la probabilité qu'il n'y ait pas de collision sur l'intervalle $[t_0, t]$. La probabilité que la dernière collision antérieur à t ait eu lieu sur $[t_0 - dt_0, t_0]$ (avec $t_0 < t$) est $e^{-(t-t_0)/\tau} \times dt_0/\tau$. L'espérance de $(t-t_0)$ est donc

$$<t-t_0>=\int_{-\infty}^{t}(t-t_0)e^{-(t-t_0)/\tau}dt_0 \quad .$$

Ici, t est fixé est c'est t_0 la variable muette. Le changement de variable $u = (t-t_0)/\tau$ montre que cette espérance vaut τ.

5. a) En appliquant la seconde loi de Newton, on trouve l'équation différentielle

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad .$$

b) Si l'électron subit une collision durant $[t, t+dt]$, sa vitesse prend la valeur aléatoire $\vec{v}_0$ puis accélère sous l'effet de $\vec{E}$ pour atteindre $\vec{v}(t+dt) = \vec{v}_0 + q\frac{\vec{E}}{m}dt$. Sinon, l'électron accélère sous l'effet du champ électrique et $\vec{v}(t+dt) = \vec{v}(t) + q\frac{\vec{E}}{m}dt$.

c) Les probabilités respectives des deux cas précédents sont dt/τ et $(1 - dt/\tau)$.

d) Le calcul qui suit est délicat. D'une part, $\vec{v}(t)$ et $\vec{v}_0$ sont des variables aléatoires sur l'ensemble des particules d'un volume mésoscopique et on va moyenner sur cet ensemble. D'autre part, les deux cas précédents (collision ou non) se présentent aléatoirement ; ils font évoluer au fil du temps ces moyennes d'ensemble. On calcule l'espérance de la vitesse à $t + dt$ en tenant compte de l'univers formé des deux événements précédents.

$$\begin{aligned} < \vec{v}(t+dt) > &= \frac{dt}{\tau} \times \left(< \vec{v}_0 > + \frac{q\vec{E}}{m}dt \right) + \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \times \left(< \vec{v}(t) > + \frac{q\vec{E}}{m}dt \right) \\ &= < \vec{v}(t) > + \frac{q\vec{E}}{m}dt - \frac{< \vec{v}(t) > dt}{\tau} \quad \text{en négligeant les termes d'ordre 2 en } dt \quad . \end{aligned}$$

e) À partir de la relation précédente, on trouve sans peine

$$\frac{d < \overrightarrow{v} >}{dt} + \frac{< \vec{v} >}{\tau} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad .$$

Cela montre que la vitesse moyenne d'un ensemble mésoscopique d'électrons suit la même équation différentielle que celle obtenue dans le modèle avec frottement visqueux. Cela justifie l'approche heuristique qui modélise l'interaction des électrons avec le réseau métallique par une force de frottement visqueux.