PC* — mathématiques **samedi 18 janvier 2025**
Devoir surveillé n° 5 — piste bleue **durée : 3 heures**

Problème 1

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers strictement négatifs, c'est-à-dire

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ x + n \neq 0\} =]-1, +\infty[\cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]-n-1, -n[\right).$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R} \setminus \{-n\}$ la fonction

$$u_n : x \mapsto \frac{1}{(x+n)^2}.$$

Quand c'est possible, on pose $\mathrm{U}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. On introduit aussi les notations

$$\mathrm{U}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}_n(x) = \mathrm{U}(x) - \mathrm{U}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

Question 1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathcal{D}$.

Question 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, exprimer la fonction $u_n^{(p)}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-n\}$.

Question 3. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $-1 < a < b$. Prouver que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} u_n^{(p)}$ converge normalement sur le segment $[a, b]$.

Question 4. Prouver que la fonction U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

Question 5. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.

a. Pour tout x dans $]-\mathrm{N}-1, -\mathrm{N}[$, exprimer $\mathrm{U}(x)$ en fonction de $\mathrm{U}(x+\mathrm{N})$ et $\mathrm{U}_\mathrm{N}(x)$.

b. En déduire que la fonction U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-\mathrm{N}-1, -\mathrm{N}[$.

Question 6. La fonction U est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$?

Question 7. Soit un entier $p \geqslant 2$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^p}$ en fonction de $\mathrm{U}^{(p-2)}(x)$.

Question 8. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Trouver un équivalent de $\mathrm{U}(x)$ quand x tend vers $-\mathrm{N}$.

Question 9. Soit $x > 0$.

a. Pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant 2$, encadrer $\mathrm{U}_\mathrm{N}(x)$ au moyen d'intégrales.

b. En déduire que $\mathrm{U}(x)$ est équivalent à $1/x$ quand x tend vers $+\infty$.

Question 10. Pour tout x dans $\mathcal{D}$, prouver la relation

$$\mathrm{U}(x) = \frac{1}{4} \left(\mathrm{U}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{U}\left(\frac{x-1}{2}\right) \right).$$

Problème 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$.

Pour tout $t > 0$, on pose $f(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)$. Pour tout $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$.

Première partie : fonction Gamma

Question 11. Montrer que la fonction Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Question 12. Pour tout $x > 0$, justifier que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Question 13. En appliquant le théorème de dérivation sous l'intégrale sur tout segment $[a, b]$ de $]0, +\infty[$, justifier que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer sa dérivée.

Question 14. Vérifier que la fonction f possède une limite finie en 0 et qu'elle est positive.

Question 15. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Question 16. Démontrer l'égalité $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t + \Gamma'(1) = 0$.

Deuxième partie : constante d'Euler

Question 17. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 2} (u_n - u_{n-1})$ est convergente et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Sa limite est notée γ.

Question 18. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ est convergente et exprimer sa somme en fonction de γ.

Troisième partie : calculs auxiliaires

Pour tout entier n strictement positif, on définit la fonction $g_n : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{-(n+1)t}}{t}$.

Dans cette partie, on fixe un entier n strictement positif.

Question 19. Montrer que la fonction g_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Question 20. On fixe momentanément x dans $]0, +\infty[$. Montrer l'égalité

$$\int_x^{+\infty} g_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_{nx}^{(n+1)x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$$

puis l'encadrement

$$\mathrm{e}^{-(n+1)x} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \int_{nx}^{(n+1)x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Question 21. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} g_n(t)\, \mathrm{d}t$.

Quatrième partie : fin du calcul

Question 22. Pour tout t dans $]0, +\infty[$, montrer l'égalité $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-nt} - g_n(t))$.

Question 23. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.

Question 24. Obtenir finalement la valeur de $\Gamma'(1)$ en fonction de γ.