

PC* 25 - DEVOIR N° 15

corrigé

Le vol des araignées

1. On mesure sur chaque photo le « rayon » r de l'araignée puis on calcule sa masse par $m_g = 4\pi r^3 \rho_e$. On obtient respectivement de gauche à droite

$$m_g = 4.10^{-6} \text{ kg} \quad m_g = 32.10^{-6} \text{ kg} \quad m_g = 4.10^{-3} \text{ kg} \quad .$$

2. Comme le champ est dirigé vers le sol, le sol porte une charge négative. Dans un condensateur plan, la norme champ vaut $|\sigma|/\epsilon_0$. Donc $\sigma = -\epsilon_0 E_0 = -1,07.10^{-9} \text{ C.m}^{-2}$. Avec le champ fourni, la tension serait $U = E_0 z_0 = 7200 \text{ kV}$, ce qui ne correspond pas du tout à la valeur mesurée. Le modèle proposé ne convient pas.

3. Le nombre de Reynolds compare les termes convectifs et les termes diffusifs de l'équation de Navier-Stokes. Il permet de prédire la nature laminaire ou turbulent de l'écoulement dans une géométrie donnée. Au niveau d'un fil de soie, c'est son diamètre qui impose les variations les plus fortes de vitesse donc c'est cette longueur qui intervient dans Re .

$$Re = \frac{U \times 2r}{\eta_a / \rho_a} = \frac{0,1 \times 2.10^{-6}}{1,9.10^{-5} \times 1} = 0,01 \quad .$$

4. Cette force dépend de Re , de U , de ρ_a et des dimensions du fil. À bas nombre de Reynolds, on s'attend à une force proportionnelle à U^1 .

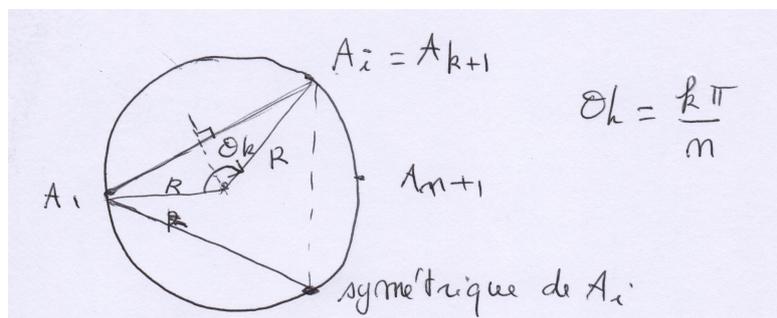
5. Le nombre N de fils nécessaires est tel que $NF = m_g g$ donc

$$N = \frac{m_g g}{F} = \frac{4.10^{-6} \times 10}{10^{-6}} = 40 \quad .$$

Ce nombre me paraît élevé : je n'imagine pas un araignée entourée de 40 fils, mais je ne suis pas spécialiste des arachnides exotiques !

6. Tous les fils jouent un rôle identique et on peut calculer le potentiel de n'importe lequel d'entre deux : je choisis celui passant par A_1 , son potentiel étant la superposition de ceux créés par A_2, A_3, \dots, A_{2n} . La charge q placée en A_i crée en A_1 le potentiel

$$V_i(A_1) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 A_1 A_i} \quad .$$



Les points symétriques par rapport à la droite $A_1 A_{n+1}$ sont à la même distance de A_1 et créent le même potentiel. On peut prendre seulement i allant de 2 à $n-1$, puis multiplier par 2. On pose $i = k+1$, et alors k va de 2 à $n-1$. Il faudra aussi ajouter le potentiel créé par A_{n+1} avec $A_1 A_{n+1} = 2R$.

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \times 2R} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 A_1 A_{k+1}}$$

Le triangle $A_1 A_{k+1}$ est isocèle et

$$A_1 A_{k+1} = 2R \sin \frac{\theta_k}{2} = 2R \sin \frac{k\pi}{2n} \quad .$$

Le rayon R du cercle est liée à l'ouverture du cône $R = L \sin \alpha$ donc

$$V = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L \sin \alpha} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\sin \frac{k\pi}{n}} \right) .$$

C'est bien l'expression proposée par l'énoncé avec $p = 8$.

L'énoncé propose de regrouper les points A_k et A_{k+n} plutôt que de regrouper les points symétriques. Dans ce cas, on utilise θ_k et $\theta_{k+n} = \theta_k + \pi$. Alors

$$\sin\left(\frac{\theta_{k+n}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_k}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta_k}{2}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) .$$

On aboutit ainsi à la première expression de G .

7. L'énergie potentielle de la charge q plongée dans le potentiel V est qV et on peut penser qu'il suffit de multiplier ce résultat par $2n$ puisqu'il y a $2n$ charges. En réalité, ce résultat est faux pour une raison subtile : il compte deux fois l'interaction entre la charge i et la charge j (avec $i \neq j$), une fois dans chaque sens. C'est pour cette raison que l'énoncé invite à introduire le coefficient $1/2$.

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \times 2nqV = nqV .$$

La position d'équilibre est celle qui minimise \mathcal{E}_e , donc qui minimise V . On trouve ainsi $\alpha = \pi/2$: l'éventail s'ouvre jusqu'à se mettre dans un plan.

8. L'énergie cinétique de l'éventail est $\mathcal{E}_c = 2n \times \frac{1}{2}mv^2$ où v est la vitesse du point portant la masse : $v = \frac{L}{2}\dot{\alpha}$.

$$\mathcal{E}_c = nm \frac{L^2}{4} \dot{\alpha}^2 .$$

Aucun effet dissipatif n'est pris en compte donc l'énergie mécanique se conserve : $\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_e = \mathcal{E}_0$. En dérivant cette relation par rapport au temps, on obtient

$$nm \frac{L^2}{4} \times 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \frac{2nq^2}{p\pi\epsilon_0 L} \times \frac{-\dot{\alpha} \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} G(n) = 0 .$$

On se place près de l'équilibre : $\alpha = \pi/2 + \eta$ avec $\eta \ll 1$.

$$\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos(\pi/2 + \eta)}{\sin^2(\pi/2 + \eta)} \simeq -\eta \quad \text{au premier ordre} .$$

Après simplification par $\dot{\alpha} = \dot{\eta}$, l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\eta} + \frac{2q^2 G(n)}{mL^3 p \pi \epsilon_0} \eta = 0 .$$

On obtient une équation d'oscillateur donc la position d'équilibre est stable (ce qu'on savait déjà puisqu'il s'agit d'un minimum d'énergie potentielle). La période des oscillations est

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL^3 p \pi \epsilon_0}{2q^2 G(n)}} = \frac{4\pi}{q} \sqrt{\frac{mL^3 \pi \epsilon_0}{G(n)}} \quad \text{car } p = 8 .$$

9. Le champ $\vec{E}_0 = -E_0 \vec{u}_z$ dérive du potentiel $V_0 = E_0 z$ et on introduit l'énergie supplémentaire $2nqV_0(z)$, évalué à l'altitude $z = L \cos \alpha$, l'origine étant prise sur S .

$$\mathcal{E}'_e = 2nqE_0 L \cos \alpha + \mathcal{E}_e .$$

La position d'équilibre est celle qui rend extrémale \mathcal{E}'_e , elle est définie par $d\mathcal{E}'_e/d\alpha = 0$, ce qui donne

$$-2nqE_0 L \sin \alpha - \frac{nq^2 G(n)}{p\pi\epsilon_0 L} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0 \quad \boxed{\frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} = -\frac{2E_0 L^2 p \pi \epsilon_0}{qG(n)}} .$$

10. Comme $q < 0$, le membre de droite est positif donc $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ sont de même signe : $\alpha \in]0, \pi/2[$. Qualitativement, la répulsion des charges tend à aplatir l'éventail et, si $q < 0$, le champ \vec{E}_0 tend à les pousser vers les haut, donc à refermer l'éventail. La compétition de ces deux effets conduit à un équilibre. Dans l'intervalle $]0, \pi/2[$, $\cos \alpha / \sin^3 \alpha$ est décroît avec α , d'où les conclusions suivantes.

- si $|q|$ augmente, α augmente, il se rapproche de $\pi/2$, l'éventail s'aplatit ;
- si n augmente, il faudrait voir comment varie $G(n)$. Si $G(n)$ augmente, alors α augmente.
- si L augmente, α diminue ;
- si E_0 augmente, α diminue.

11.

$$q = -\frac{2E_0L^2 \times 8\pi\epsilon_0 \sin^3 \alpha}{G(3) \cos \alpha} \quad q = -1, 1 \text{ nC} \quad .$$

12. La force sur un fils est $F = qE_0 = 120.10^{-9} \text{ N}$. Le nombre de fils $2n$ est tel que $2n|q|E_0 \geq mg$

$$2n \geq \frac{mg}{|q|E_0} \simeq 333 \quad .$$

Cela paraît étonnement grand, encore plus que dans la question 5.

13. Dans le vide, le potentiel vérifie l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ qui s'écrit ici

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \quad .$$

14. En reportant la forme proposée dans l'équation, on obtient après calcul des dérivées

$$r^{u-2}(g''(\theta) + u^2g(\theta)) = 0 \quad \text{et donc} \quad g''(\theta) + u^2g(\theta) = 0 \quad .$$

Cette équation différentielle se résout en

$$g(\theta) = A \cos(u\theta) + B \sin(u\theta)$$

donc

$$V = V_0 + r^u(A \cos(u\theta) + B \sin(u\theta)) \quad .$$

Le conditions de bord imposent : $\forall r \in]0, \infty[$, $V(r, 0) = V_0$ et $V(r, \varphi) = V_0$ donc $g(0) = 0$ et $g(\varphi) = 0$. La première condition donne $A = 0$ et la seconde s'écrit

$$B \sin(u\varphi) = 0 \quad .$$

Pour une solution non constante, B est non nul, donc $u\varphi = \ell\pi$ avec $\ell \in \mathbb{N}$. Ainsi $u = \ell\pi/\varphi$ est

$$V = V_0 + Br^{\ell\pi/\varphi} \sin\left(\frac{\ell\pi\theta}{\varphi}\right) \quad .$$

15. L'énoncé impose de prendre $\ell = 1$. On calcule

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \\ \vec{E} &= -\frac{\pi}{\varphi} r^{\frac{\pi}{\varphi}-1} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\varphi}\right) \vec{u}_r - Br^{\frac{\pi}{\varphi}-1} \frac{\pi}{\varphi} \cos\left(\frac{\pi\theta}{\varphi}\right) \vec{u}_\theta \\ \vec{E} &= -B \frac{\pi}{\varphi} r^{\frac{\pi}{\varphi}-1} \left(\sin\left(\frac{\pi\theta}{\varphi}\right) \vec{u}_r + \cos\left(\frac{\pi\theta}{\varphi}\right) \vec{u}_\theta \right) \end{aligned}$$

On cherche à quelle condition E tend vers l'infini si tend vers 0. C'est le cas si l'exposant en r est négatif, c'est à dire si

$$\varphi > \pi \quad .$$

Cela signifie que le conducteur doit former dans l'air un angle aigu (ou que l'air doit former un angle obtus). La divergence la plus forte est obtenue pour $\pi \rightarrow 2\pi^-$, avec un comportement en $r^{-1/2}$. Cela correspond à conducteur très pointu, d'où l'expression « effet de pointe ».

Skimboard

corrigé

1. On considère le système ouvert limité par les abscisses x et $x + dx$ dans \vec{R} . En régime permanent, sa masse est constante donc la masse d'eau qui y pénètre pendant cet égard à celle qui en sort.

$$\rho h(x)Lv(x)dt = \rho h_T V L dt$$

$$h(x)v(x) = h_T V \quad .$$

2. L'équation locale de conservation de la masse s'écrit $\text{div}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$. Ici, ρ ne dépend ni de l'espace ni du temps donc $\text{div}\vec{v} = 0$ soit $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ou $v(x) = V$. Cela est contradictoire avec la question précédente. En réalité, \vec{v} possède aussi une composante selon \vec{u}_y qu'on a négligée ce qui interdit de raisonner sur $\text{div}\vec{v}$.
3. La surface de contrôle possède une entrée à gauche et une sortie à droite donc, en se ramenant au système fermé Σ , le raisonnement vu en cours donne

$$\frac{dP_x}{dt} = D_m(V - v(x_A)) \quad \text{avec} \quad D_m = \rho L h_T V \quad .$$

De plus, $v(x_A) = h_T V / h_A = \lambda V$ donc

$$\frac{dP_x}{dt} = \rho L h_T V^2 (1 - \lambda) \quad .$$

4. La partie mouillée de la planche est soumise à p_0 de la part de l'air et à $p(x)$ de la part de l'eau, ce qui donne une pression effective $(p_0 - p(x))$ s'exerçant vers la bas. La projection de ces forces sur \vec{u}_x est

$$\vec{F} = \int_{S_m} (p(x) - p_0) d\vec{S} \quad F_x = \int_{S_m} (p(x) - p_0) d\vec{S} \cdot \vec{u}_x \quad .$$

5. Concernant maintenant le système Σ , les forces de pression selon \vec{u}_x s'exercent sur la face gauche, sur la face droite et sur la surface mouillée S_m :

$$R_x = p_A L h_A - p_0 L h_T - \int_{S_m} p(x) d\vec{S} \cdot \vec{u}_x \quad .$$

Grâce à l'expression précédente de F_x , on voit que

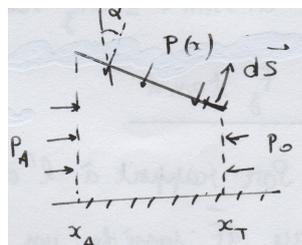
$$\int_{S_m} p(x) d\vec{S} \cdot \vec{u}_x = \int_{S_m} p_0 d\vec{S} \cdot \vec{u}_x + F_x$$

donc

$$R_x = p_A L h_A - p_0 L h_T - \int_{S_m} p_0 d\vec{S} \cdot \vec{u}_x - F_x \quad .$$

Le troisième terme est l'effet de la pression atmosphérique projeté sur \vec{u}_x , on peut l'obtenir en projetant verticalement la surface sur laquelle il s'applique et il vaut donc $-p_0(h_A - h_T)L$. Donc

$$R_x = p_A L h_A - p_0 L h_T - p_0(h_A - h_T)L - F_x = (p_A - p_0)L h_A - F_x \quad .$$



REFAIRE

6. L'effet de la pesanteur est négligé. En écrivant la relation de Bernoulli sur une ldc allant de l'abscisse x_A à l'abscisse x_T , on a

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v(x_A)^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2 \quad .$$

Or $v(x_A) = h_T V / h_A$ donc

$$p_A = p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2 \left(1 - \frac{h_T^2}{h_A^2}\right)$$

7. La seconde loi de Newton $\frac{dP_x}{dt} = R_x$ s'écrit, compte tenu des expressions précédentes,

$$\rho L h_T V^2 \left(1 - \frac{h_T}{h_A}\right) = (p_A - p_0) L h_A - F_x \quad .$$

On en déduit l'expression de F_x , dans laquelle on élimine $(p_A - p_0)$ en tenant compte du résultat obtenu par la relation de Bernoulli :

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{2}\rho V^2 \left(1 - \frac{h_T^2}{h_A^2}\right) L h_A - L h_T V^2 \left(1 - \frac{h_T}{h_A}\right) \\ F_x &= \frac{1}{2}\rho L V^2 \left(1 - \frac{h_T}{h_A}\right) h_A \left(1 + \frac{h_T}{h_A} - 2\frac{h_T}{h_A}\right) \\ &= \frac{1}{2}\rho L V^2 h_A \left(1 - \frac{h_T}{h_A}\right) \left(1 - \frac{h_T}{h_A}\right) \\ F_x &= \frac{1}{2}\rho L V^2 h_A \left(1 - \frac{h_T}{h_A}\right)^2 \quad . \end{aligned}$$

8. Les forces de pression sont perpendiculaires à la planche donc \vec{F} forme un angle α avec la verticale. Dans ces conditions,

$$F_x = F_z \tan \alpha \quad .$$

De plus, $\tan \alpha \approx \sin \alpha = (h_A - h_T) / \ell_m$ donc

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{F_x}{\tan \alpha} = \frac{1}{2}\rho L \ell_m V^2 h_A \left(1 - \frac{h_T}{h_A}\right)^2 \frac{1}{h_A - h_T} \\ F_z &= \frac{1}{2}\rho L \ell_m V^2 \frac{(h_A - h_T)}{h_A} \quad . \end{aligned}$$

9. La seconde loi de Newton appliquée à l'ensemble formé de la planche et du sportif dans le référentiel lié à la planche s'écrit :

$$m \frac{d(-V\vec{u}_x)}{dt} = -mg\vec{u}_z + \vec{F}$$

En projection, on obtient :

$$-m \frac{dV}{dt} = F_x \quad \text{et} \quad 0 = -mg + F_z \quad .$$

Donc $F_z = mg$ et $F_x = F_z \tan \alpha \simeq F_z \alpha$.

Ainsi :

$$-m \frac{dV}{dt} = mg\alpha \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dt} = -g\alpha \quad .$$

10. $(h_A - h_T) = \ell_m \tan \alpha \simeq \ell_m \alpha$. Au premier ordre en α ,

$$\frac{h_A - h_T}{h_A} \simeq \frac{\ell_m \sin \alpha}{h_T}$$

donc

$$F_z \approx \frac{1}{2}\rho L \ell_m V^2 \frac{\ell_m \alpha}{h_T} \quad .$$

À partir de $F_z = mg$, on trouve

$$\ell_m = \sqrt{\frac{2mgh_T}{\rho V^2 L \alpha}}$$

11. Selon la question précédente, $\ell_m \propto 1/V$. La courbe proposée rappelle vaguement une fonction inverse et est donc grossièrement en accord avec le modèle.
12. La relation $dV/dt = -\alpha g$ s'intègre en $V = V_0 - g\alpha t$ et $x = x_0 - V_0 t + g\alpha t^2/2$. La distance parcourue est

$$d = V_0 t_f - \frac{g\alpha t_f^2}{2} .$$

où t_f désigne l'instant final. Cet instant est tel que $\ell_m(t_f) = L_0 = 1,4$ m et la courbe montre que cela se produit lorsque $V = V_f = 1$ m.s⁻¹. Avec l'expression de V , on en déduit $t_f = (V_0 - V_f)/(g\alpha) = 5$ s. On trouve ainsi $d = 9$ m.

13. On a négligé les forces visqueuses que l'eau exerce sur la planche.
14. La masse qui entre à gauche est $\delta m_e = (h_T + \delta)\rho V L dt$, celle qui sort à gauche est $\delta m_s = \delta V \rho L dt$ et celle qui sort à droite $\delta m'_s = h_T V \rho L dt$. La variation de la quantité de mouvement s'exprime par

$$dP_x(\Sigma) = P_x(\Sigma, t + dt) - P_x(\Sigma, t).$$

En régime permanent, la zone commune aux instants t et $t + dt$ ne voit pas sa quantité de mouvement varier et il reste

$$dP_x = \delta m_s(-V) + \delta m'_s V - \delta m_e V = -2\rho L V^2 \delta dt \quad \frac{dP_x}{dt} = -2\rho V^2 \delta .$$

15. La seconde loi de Newton s'écrit $\frac{dP_x}{dt} = -F_x$. Comme $F_x = -F_z \tan \alpha = -mg \tan \alpha$, on en déduit

$$-2\rho V^2 \delta = -mg \tan \alpha \quad \text{puis} \quad \delta = \frac{mg \tan \alpha}{2\rho V^2}$$

16. $\delta = 1,5$ mm

Disque de Courbino

① Un électron subit la force électrique $-e\vec{E}$ et la force de frottement $-\alpha\vec{v}$. Le pfd s'écrit donc

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\vec{v} - e\vec{E}$$

Comme $\vec{f} = -m e \vec{v}$, on en déduit

$$m \frac{d\vec{f}}{dt} = -\alpha \vec{f} + m e^2 \vec{E}$$

$$\frac{d\vec{f}}{dt} + \frac{\alpha}{m} \vec{f} = \frac{m e^2}{m} \vec{E}$$

$$\tau = \frac{m}{\alpha}$$

② En régime permanent, \vec{E} est constant et \vec{f} aussi.

Pour $\frac{d\vec{f}}{dt} = \vec{0}$, on obtient $\vec{f} = \frac{m e^2}{m} \vec{E}$

On retrouve la loi d'Ohm $\vec{f} = \gamma \vec{E}$ avec $\gamma = \frac{m e^2}{m}$

Si le champ dépend du temps, la solution de l'éq. diff. obtenue par $\frac{d\vec{f}}{dt} = \vec{0}$ ne convient plus. Cependant, on peut l'utiliser approximativement si \vec{E} varie « assez

lentement », c'est à dire si $\frac{1}{\tau} \gg \dot{\gamma}$.

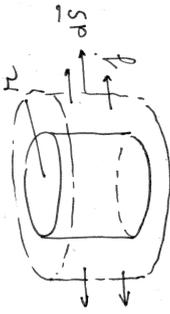
On peut le justifier par une analyse d'ordre de grandeur. Si $\vec{f} = \gamma \vec{E}$, \vec{f} est aussi T-périodique.

$$\left\| \frac{d\vec{f}}{dt} \right\| \approx \frac{1}{\tau} \left\| \vec{f} \right\| = \frac{1}{\tau} \gamma \left\| \vec{E} \right\|$$

On peut négliger le terme $\frac{d\vec{f}}{dt}$ de l'éq diff si

$$\left\| \frac{d\vec{f}}{dt} \right\| \ll \left\| \frac{\vec{f}}{\tau} \right\| \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{\tau} \ll \frac{1}{\tau} \gg \dot{\gamma}$$

③ Nous sommes en régime permanent ; \vec{f} est à flux conservatif et chaque cylindre de rayon r compris entre R_1 et R_2 est traversé par la même intensité I .



$$I = \int \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

$$= \int f(r) \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \vec{u}_r$$

$$= 2\pi r h f(r)$$

$$f(r) = \frac{I}{2\pi r h}$$

④ Loi d'Ohm : $\vec{E} = \frac{\vec{f}}{\gamma} = \frac{I}{2\pi r h \gamma} \vec{u}_r$

$$U = V(R_1) - V(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{2\pi r h \gamma} \vec{u}_r \cdot dr \vec{u}_r$$

$$R_0 = \frac{1}{2\pi h \gamma} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$U = \frac{I}{2\pi h \gamma} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

⑤ Puissance joule volumique : $\rho = \vec{f} \cdot \vec{E} = \frac{f^2}{\gamma}$

La puissance joule totale est

$$P_J = \iiint_V \frac{f^2}{\gamma} d^3z = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{1}{\gamma} \times 2\pi r dr \times r \times h$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{I}{2\pi r h} \right)^2 \frac{1}{\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^h r dr d\theta$$

$$= \frac{I^2}{2\pi h \gamma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

3

$$P_J = \frac{I^2}{2\pi h \gamma} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Comme $P_J = R_0 I^2$, on identifie $R_0 = \frac{1}{2\pi h \gamma} \ln \frac{R_2}{R_1}$

$$\gamma = \frac{1}{2\pi h R_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$m = \frac{m \gamma}{e^2 \lambda}$$

$$m = 2,1 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$$

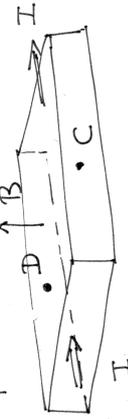
⑦ Force de Lorentz $\vec{F} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$

Dans un conducteur ohmique, elle se manifeste par l'effet Hall.

Une ddp transversale

$U_H = V_D - V_C$ apparaît

entre les faces du conducteur.



⑧ Le pfd appliqué à un électron s'écrit

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} - \alpha \vec{v} - e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Comme $\vec{v} = -m \vec{v}$, on en déduit

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m e^2 \vec{E} - \alpha \vec{v} - e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m} \vec{v} - \frac{e \vec{B}}{m} \wedge \vec{v} = \frac{m e^2}{m} \vec{E}$$

On identifie $w_c = \frac{e B_0}{m}$. Il s'agit de la pulsation cyclotron. Elle décrit le mouvement circulaire d'un électron soumis à \vec{B} seulement.

4

⑨ $\vec{m}_s \wedge \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 & j_r & -j_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -j_r & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j_\theta \\ j_r \\ 0 \end{pmatrix}$

En régime permanent, $\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{0}$, l'équation vectorielle de la question 8 se projette en

$$\begin{cases} \frac{j_r}{\lambda} + w_c j_\theta = \frac{m e^2}{m} E_r \\ -w_c j_r + \frac{j_\theta}{\lambda} = \frac{m e^2}{m} E_\theta \end{cases}$$

$$E_r = \frac{m}{m e^2 \lambda} j_r + \frac{m}{m e^2} w_c j_\theta$$

$$E_\theta = -\frac{m}{m e^2} w_c j_r + \frac{m}{m e^2 \lambda} j_\theta$$

Comme $\gamma = \frac{m e^2 \lambda}{m}$

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\gamma & w_c \lambda / \gamma \\ -w_c \lambda / \gamma & 1/\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice de résistivité en $\Omega \cdot m$.

$$\rho_{rr} = \rho_{\theta\theta} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\rho_{r\theta} = -\rho_{\theta r} = \frac{w_c \lambda}{\gamma}$$

⑩ Comme $\vec{E} = E_r \vec{u}_r$, $E_\theta = 0$.

On en déduit $-\frac{w_c \lambda}{\gamma} j_r + \frac{1}{\gamma} j_\theta = 0$

donc $j_\theta = w_c \lambda j_r$

5

$$E_r = \frac{1}{\gamma} j_r + \frac{\omega_c^2}{\gamma} j_\theta$$

$$= \frac{1}{\gamma} j_r + \frac{\omega_c^2 \gamma}{\gamma} j_\theta$$

$$E_r = \frac{1}{\gamma} (1 + \omega_c^2 \gamma^2) j_r$$

$$\omega_c^2 \gamma^2 = \frac{e^2 B^2 \gamma^2}{m^2}$$

$$\omega_c^2 \gamma^2 = e^2 B^2 \left(\frac{\gamma}{m e^2} \right)^2 = \left(\frac{\gamma B}{m e} \right)^2$$

$$E_r = \frac{1}{\gamma} \left(1 + \left(\frac{\gamma B}{m e} \right)^2 \right) j_r$$

(11) Le vecteur \vec{j} possède maintenant deux composantes :

$\vec{j} = j_r \vec{u}_r + j_\theta \vec{u}_\theta$. L'intensité est toujours le flux de \vec{j} sur un cylindre :

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int (j_r \vec{u}_r + j_\theta \vec{u}_\theta) \cdot dS \vec{u}_r$$

Comme $\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_r = 0$, on obtient comme plus haut

$$I = \int j_r dS = 2\pi r h j_r \quad j_r = \frac{I}{2\pi r h}$$

$$(12) E_r = \frac{1}{\gamma} \left(1 + \left(\frac{\gamma B}{m e} \right)^2 \right) \frac{I}{2\pi r h}$$

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot d\vec{l}$$

En prenant $d\vec{l} = dr \vec{u}_r$, $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E_r dr$ et il est inutile d'exprimer E_θ .

6

$$U = \frac{1}{\gamma} \left(1 + \left(\frac{\gamma B}{m e^2} \right)^2 \right) \frac{I}{2\pi h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{1}{\gamma} \frac{I}{2\pi h} \ln \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \left(\frac{\gamma B}{m e} \right)^2 \right)$$

$$U = R I \quad \text{avec} \quad R = R_0 \left(1 + \left(\frac{\gamma B}{m e} \right)^2 \right)$$

$$(13) \frac{R - R_0}{R} = f = 3 \cdot 10^{-7}$$

La variation de résistance est très petite.

$$f = \left(\frac{\gamma B}{m e} \right)^2$$

Diode à vide cylindrique

1. Dans le référentiel galiléen du laboratoire, on peut négliger le poids de l'électron qui n'est soumis qu'à la force électrique. Elle dérive de l'énergie potentiel $E_p = -eV$ et la conservation de l'énergie mécanique s'écrit

$$\frac{1}{2}mv^2(r) - eV(r) = \frac{1}{2}mv(0)^2 - eV(0) \quad .$$

Comme $V(0) = 0$ et $v(0) = 0$, on en déduit

$$v(r) = \sqrt{\frac{2eV(r)}{m}} \quad .$$

2. L'intensité est le flux de \vec{j} au travers d'un cylindre. Elle est ici orientée de la périphérie vers l'axe donc

$$I = \int j(r) \vec{u}_r \cdot (-dS \vec{u}_r) = -j(r) \times 2\pi r h \quad j(r) = -\frac{I}{2\pi r h} \quad .$$

Comme $j = -nev = \rho v$, on en déduit

$$\rho = \frac{j}{v} = -\frac{I}{2\pi r h} \sqrt{\frac{m}{2eV}} \quad .$$

3. L'équation de Poisson $\Delta V + \rho/\epsilon_0 = 0$ s'écrit ici

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) - \frac{I}{2\pi r \epsilon_0 h} \sqrt{\frac{m}{2eV}} = 0 \quad . \quad \text{On pose } K = \frac{I}{2\pi \epsilon_0 h} \sqrt{\frac{m}{2e}} \quad .$$

4. En remplaçant V par r^α , on obtient

$$\alpha^2 A r^{\alpha-2} - \frac{K}{\sqrt{A}} r^{-1-\alpha/2} = 0 \quad .$$

Cette égalité a lieu pour tout r dans l'intervalle étudié si et seulement si

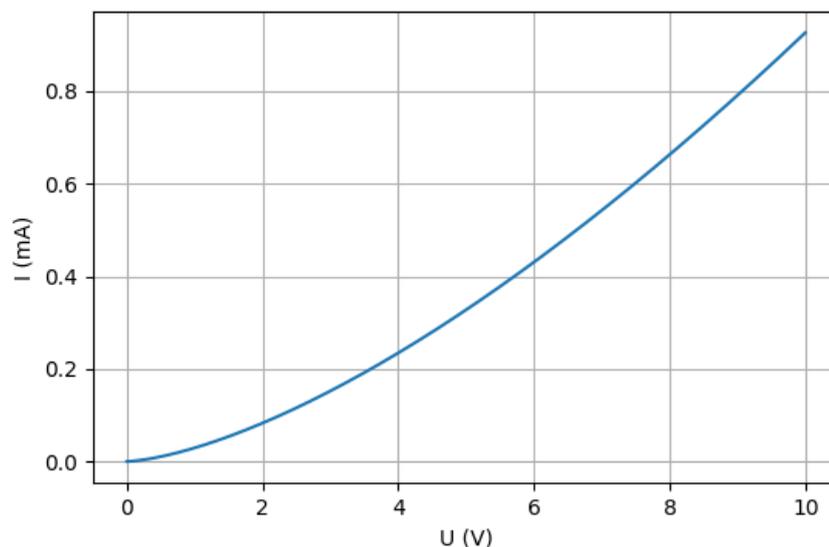
$$\alpha - 2 = -1 - \frac{\alpha}{2} \quad \boxed{\alpha = \frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad K = \alpha^2 A^{3/2} \quad A = \frac{K^{2/3}}{\alpha^{4/3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} K^{2/3} \quad \boxed{A = \left(\frac{9I}{8\pi\epsilon_0 h} \sqrt{\frac{m}{2e}}\right)^{2/3}} \quad .$$

5. Comme $U_0 = V(R)$, on a

$$U_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} K^{2/3} R^{2/3} \quad K = \frac{4}{9R} U_0^{3/2} \quad \boxed{I = \frac{8\pi\epsilon_0 h}{9R} \sqrt{\frac{2e}{m}} U_0^{3/2}}$$

6. Si $U_0 \leq 0$, les électrons émis par la cathode sont repoussés par l'anode au lieu d'être attirés; ils restent près de la cathode. Comme l'anode n'est pas chauffée, elle n'expulse pas d'électron susceptible de voyager vers le centre. Aucun courant ne circule.

7. Pour $U_0 = 10$ V, $I = 0,93$ mA.



Écrantage en double couche

1. $U(x) = qV(x)$ et $n = n_\infty e^{-qV/(k_B T)}$.
2. On ajoute les contributions des cations et de anions.

$$\begin{aligned}\rho_{\text{sol}}(x) &= \rho^+ + \rho^- = n^+ Ze + n^- (-Ze) \\ &= Ze (n^+ - n^-) \\ &= Ze (n_\infty e^{-ZeV/k_B T} - n_\infty e^{+ZeV/k_B T}) \\ \rho_{\text{sol}}(x) &= -2Zen_\infty \sinh\left(\frac{ZeV(x)}{k_B T}\right)\end{aligned}$$

Le potentiel électrostatique suit l'équation de Poisson :

$$\frac{d^2 V}{dx^2} - \frac{2Zen_\infty}{\epsilon} \sinh\left(\frac{ZeV(x)}{k_B T}\right) = 0 \quad (\text{EDV}) \quad .$$

3. On pose $V_T = \frac{k_B T}{Ze}$ de manière à avoir $\sinh\left(\frac{ZeV}{k_B T}\right) = \sinh\left(\frac{V}{V_T}\right) = \sinh \psi$. En remplaçant V par ψV_T , l'équation (EDV) s'écrit

$$V_T \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \frac{2Zen_\infty \sinh \psi}{\epsilon} = 0$$

Cette équation différentielle montre que $\frac{2Zen_\infty}{\epsilon V_T}$ est homogène à L^{-2} . On pose donc

$$\boxed{\lambda_D^2 = \frac{\epsilon V_T}{2Zen_\infty} = \frac{\epsilon k_B T}{2Z^2 e^2 n_\infty}}$$

et l'équation devient

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} - \frac{1}{\lambda_D^2} \sinh \psi = 0 \quad .$$

Procédons maintenant au changement de variable $X = x/\lambda_D$.

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dX} \frac{dX}{dx} = \frac{d\psi}{dX} \frac{1}{\lambda_D} \quad \text{puis} \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_D^2} \frac{d^2 \psi}{dX^2}$$

L'équation écrit finalement :

$$\frac{d^2 \psi}{dX^2} - \sinh \psi = 0 \quad .$$

On travaille désormais avec les grandeurs adimensionnées ψ et X plutôt qu'avec V et x . On fait ainsi disparaître les échelles de longueur et de tension propres à un problème particulier pour traiter simultanément tous les problèmes du même type.

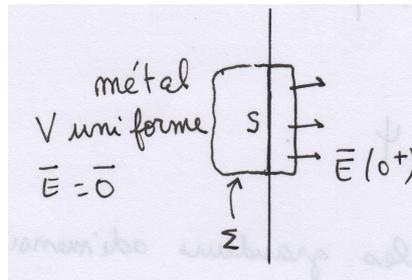
4. $V_T = 25,9 \text{ mV}$; $\lambda_D = 3,1 \text{ nm}$; $A^* = 16$.
5. Si $\psi \ll 1$, i.e. si $V \ll V_T$, $\sinh \psi \approx \psi$ et l'équation devient

$$\frac{d^2 \psi}{dX^2} - \psi = 0$$

6. La solution générale s'écrit $\psi = Ae^X + Be^{-X}$. Comme V ne tend pas vers l'infini quand $x \rightarrow \infty$, on a $A = 0$ puis

$$\begin{aligned}V &= V_T B e^{-x/\lambda_D} \\ E &= -\frac{dV}{dx} = \frac{V_T B}{\lambda_D} e^{-x/\lambda_D}\end{aligned}$$

7. Appliquons le théorème de Gauss pour trouver E en $x = 0^+$. On considère la surface fermée Σ représentée ci-dessous, qui est pour partie dans le métal et pour partie en $x = 0^+$, dans la solution. L'aire de sa section droite par un plan $x = Cste$ est S .



Le flux du champ électrique est nul sur les parties latérales et dans le métal (où le champ est nul). À travers Σ , il vaut s'exprime donc par

$$\Phi(\vec{E}, \Sigma) = E(0^+)S$$

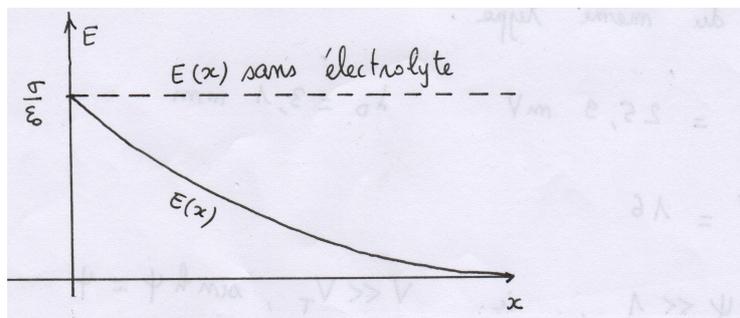
Par ailleurs, $Q_{\text{int}} = \sigma S$ et le théorème de Gauss donne

$$E(0^+)S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad E(0^+) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} .$$

Cela permet de trouver la constante B : $\frac{V_T B}{\lambda_D} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ donc $V_T B = \frac{\sigma \lambda_D}{\epsilon_0}$

$$V(x) = \frac{\lambda_D \sigma}{\epsilon_0} e^{-x/\lambda_D} \quad E(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e^{-x/\lambda_D}$$

8. Sans électrolyte, le champ serait uniforme (créé par un plan infini comme vu en cours). Ici au contraire, l'accumulation d'ions près du colloïde atténue le champ par un phénomène d'écrantage, sur une longueur caractéristique λ_D . Si $n\infty \rightarrow 0$, $\lambda_D \rightarrow 0$ ce qui correspond bien à l'absence de décroissance du champ. Si T augmente, λ_D augmente et l'écrantage devient moins efficace. Le rapport A^* , très supérieur à 1, permet d'assimiler le colloïde sphérique à un plan infini.



9. La charge est $Q = \sigma A$ et le potentiel $V_c = V(0) = \sigma \lambda_D / \epsilon$, donc $\sigma = \epsilon V_c / \lambda$ et $Q = \epsilon A V_c / \lambda$. On en déduit

$$C_c = \frac{\epsilon A}{\lambda_D}$$

comme pour un condensateur plan possédant des plaques d'aire A et séparées de la distance λ_D .

10. $\sigma = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ C.m}^{-2}$ ou encore $\sigma = 3,7 \cdot 10^{-4} \text{ e.Å}^{-2}$. L'unité naturelle de charge du problème est la charge élémentaire, et l'unité naturelle de longueur l'angström.