Exercice 1. (*)

1. Prouver que pour tout p dans $\mathbb{N}$, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^p \dfrac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

En déduire que pour tout polynôme complexe P, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(n) \dfrac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

On peut ainsi définir pour tout polynôme P la fonction

$$\mathrm{L(P)} : z \mapsto \mathrm{e}^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(n) \frac{z^n}{n!}.$$

2. On définit une suite $(\mathrm{P}_k)_{k\geqslant 0}$ de polynômes en posant $\mathrm{P}_0 = 1$ et

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}_r = \frac{1}{r!} \prod_{k=0}^{r-1} (\mathrm{X} - k).$$

a. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, la famille $\mathcal{C}_n = (\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

b. Pour tout couple (r, i) d'entiers naturels, vérifier l'égalité $\mathrm{P}_r(i) = \dbinom{i}{r}$.

c. Pour tout entier r et tout z complexe, démontrer l'égalité $\mathrm{L}(\mathrm{P}_r)(z) = \dfrac{z^r}{r!}$.

d. En déduire que L laisse stable $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ puis montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ induit par L est un automorphisme.

3. Dans cette question, on fixe un entier n strictement positif. Pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, on pose $\mu_r = \sum\limits_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \dbinom{r}{k} k^n$.
On pose ensuite $\mathrm{Q} = \sum\limits_{r=0}^{n} \mu_r \mathrm{P}_r$.

a. Pour tout couple (k, i) d'entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant i$, prouver l'égalité $\sum\limits_{r=k}^{i} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{i}{r} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i. \end{cases}$

b. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, montrer l'égalité $\mathrm{Q}(i) = i^n$. En déduire l'égalité $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^n$.

c. En déduire une expression du polynôme $\mathrm{L}(\mathrm{X}^n)$.

d. Retrouver les expressions des polynômes $\mathrm{L}(\mathrm{X}^2)$ et $\mathrm{L}(\mathrm{X}^3)$ obtenues en travaux dirigés.

Exercice 2. (**) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe dont tous les termes sont non nuls. On note R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs des séries entières

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{a_n} z^n.$$

a. On suppose que R_1 et R_2 sont dans $]0, +\infty[$. Prouver l'inégalité $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 \leqslant 1$.

b. Soit $s \in]0, 1]$. Trouver un exemple pour lequel $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 = s$.

Exercice 3. (**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n} \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Déterminer le rayon de convergence et une expression de la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n\, x^n$.

Exercice 4. (*) On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique.

On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations

$$x - y - z + t = 0 \qquad \text{et} \qquad 2x - z - t = 0.$$

Déterminer la matrice canoniquement associée à la symétrie orthogonale par rapport à F.

Exercice 5. (**) Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que les valeurs propres complexes de A sont imaginaires pures.

b. Justifier que les matrices $\mathrm{A} - \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{A} + \mathrm{I}_n$ sont inversibles.

c. On pose $\mathrm{B} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{I}_n + \mathrm{A})$. Montrer que B est une matrice orthogonale.

d. Montrer que $\mathrm{B} + \mathrm{I}_n$ est inversible.

e. Réciproquement, on considère une matrice P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ qui n'admet pas -1 pour valeur propre. Montrer qu'il existe une matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $\mathrm{P} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{M})^{-1}(\mathrm{I}_n + \mathrm{M})$.

Exercice 6. (**) On considère un espace euclidien E non trivial, dont on note n la dimension. On se donne un entier p et des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ de E.

On suppose que pour tout couple (i, j) d'indices distincts entre 1 et p, le nombre $(v_i|v_j)$ est strictement négatif. Le but de cet exercice est de prouver que la plus grande valeur possible pour p est $n + 1$.

a. Dans le cas $n = 2$, expliquer avec un dessin pourquoi l'inégalité $p \leqslant 3$ est vraie.

b. Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. On pose

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i v_i \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{i=1}^{p} |x_i| \; v_i.$$

Prouver l'inégalité $||x|| \geqslant ||y||$.

c. Dans le cas où x est nul, montrer que les x_i sont tous nuls ou tous non nuls.

d. Montrer que la famille $(v_1, \ldots, v_{p-1})$ est libre. Qu'en déduit-on ?

e. Trouver une famille (v_1, v_2, v_3) de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant aux conditions du préambule.

f. (***) Construire (par récurrence) une famille $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions du préambule.

Exercice 7. (**) On considère la matrice $\mathrm{A} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à cette matrice.

a. Vérifier que f est une isométrie.

b. Vérifier que f admet 1 pour vecteur propre et déterminer l'espace propre associé. On précisera un vecteur unitaire a qui dirige cette droite.

c. On note P l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(a)$. On sait d'après le cours que P est stable par f. On note g l'endomorphisme de P induit par P.

Construire un vecteur unitaire b appartenant à P puis calculer le vecteur $a \wedge b$, noté c.

d. Justifier que (b, c) est une base orthonormée de P puis calculer la matrice de g relativement à cette base.

e. Décrire l'isométrie f en termes géométriques.
