PC* — mathématiques **jeudi 15 février 2024**
Devoir surveillé n° 6 — piste rouge **durée : 4 heures**

Problème II

On considère la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$.

Question 23. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ à l'aide de fonctions usuelles.

Question 24. Justifier rapidement que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 25. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, vérifier la relation

$$4xf''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0.$$

Question 26. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, justifier la relation

$$4xf^{(n+1)}(x) + (4n-2)f^{(n)}(x) + f^{(n-1)}(x) = 0.$$

Question 27. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction $f^{(n)}$ a une limite nulle en $+\infty$.

Question 28. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $|f^{(n)}|$ possède un maximum sur $[0, +\infty[$.

On considère alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[0, +\infty[$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|f^{(n)}(x_n)\right| = ||f^{(n)}||_{\infty,[0,+\infty[}.$$

Question 29. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\left|f^{(n)}(x_n)\right| \leqslant \frac{n!}{(2n)!}$.

On raisonnera par récurrence en distinguant les cas $x_n = 0$ et $x_n > 0$.

Question 30. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $||f^{(n)}||_{\infty,[0,+\infty[} = \frac{n!}{(2n)!}$.
