PC* — mathématiques **jeudi 15 février 2024**
Devoir surveillé n° 6 — piste noire **durée : 4 heures**

Problème II

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Dire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ *converge au sens d'Abel* signifie que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ possède un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et que la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

possède une limite finie quand x tend vers 1 en restant dans $]0,1[$. En cas d'existence, cette limite finie est appelée *somme d'Abel* de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$.

Partie 1 Dans cette partie, on étudie quelques exemples.

Question 10. Prouver que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n$ converge au sens d'Abel et calculer sa somme d'Abel.

Question 11. Même question pour la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n n$.

Question 12. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} 1$ converge-t-elle au sens d'Abel ?

Question 13. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le produit de Cauchy de ces deux suites.

On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent au sens d'Abel. Prouver alors que la série $\sum c_n$ converge également au sens d'Abel et préciser sa somme d'Abel.

Partie 2 Dans cette partie, on prouve le *théorème d'Abel*, qui affirme que la convergence d'une série implique sa convergence au sens d'Abel.

On considère donc une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge (au sens usuel). Pour tout entier N, on pose alors

$$\mathrm{R_N} = \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} a_n.$$

Question 14. Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vaut au moins 1.

On peut donc définir sur l'intervalle $]-1,1[$ la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on peut définir f en 1 aussi.

Question 15. Pour tout x dans $]-1,1[$, prouver la relation

$$f(x) = f(1) - (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{R}_n x^n.$$

Question 16. On fixe $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad |\mathrm{R}_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Question 17. On garde les notations ε et n_0 de la question précédente. Pour tout x dans $[0,1[$, prouver l'inégalité

$$|f(x) - f(1)| \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{n_0} |\mathrm{R}_n|\, x^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Question 18. Conclure.

Partie 3 Dans cette partie, on prouve le *théorème de Tauber*, qui est une réciproque partielle du théorème d'Abel.

On considère une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose que la série $\sum a_n$ converge au sens d'Abel. Sa somme d'Abel est notée A. Pour tout x dans $]-1,1[$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Enfin, on suppose que la suite $(na_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. Pour tout N dans $\mathbb{N}$, on pose alors

$$\mu_{\mathrm{N}} = \sup\left\{|na_n| \ ; \ n \geqslant \mathrm{N}+1\right\}.$$

Question 19. Prouver que la suite $(\mu_{\mathrm{N}})_{\mathrm{N}\geqslant 0}$ converge vers 0.

Question 20. Soit x dans $[0,1[$. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, prouver la majoration $1-x^k \leqslant k(1-x)$.

Question 21. Soient x dans $[0,1[$ et N dans $\mathbb{N}$. Prouver la majoration

$$\left|\sum_{k=\mathrm{N}+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leqslant \frac{\mu_{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}} \times \frac{1}{1-x}.$$

Question 22. Soient x dans $[0,1[$ et N dans $\mathbb{N}^*$. Prouver la majoration

$$\left|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} a_k - f(x)\right| \leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} |ka_k| + \frac{\mu_{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}} \times \frac{1}{1-x}.$$

Question 23. Prouver le théorème de Cesàro : si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe convergente, de limite ℓ, alors la suite de terme général

$$m_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k$$

converge également vers ℓ.

Question 24. Prouver que la suite de terme général $\sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}} a_k - f\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{N}}\right)$ converge vers 0.

Question 25. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k$ est convergente et préciser sa somme.