

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – (XEULC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Matrices infiniment divisibles

Notations :

On désigne par \mathbf{R} le corps des nombres réels et par \mathbf{R}_+ l'ensemble des réels positifs ou nuls. Soit n un entier ≥ 1 . On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes et n colonnes. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $\det(M)$ son déterminant. On désigne par $\mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices symétriques. On note $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice identité. On identifie \mathbf{R}^n et l'espace des matrices à n lignes et 1 colonne.

Première partie : la fonction Γ

1a. Montrer que pour réel $s > 0$, la fonction $x \mapsto e^{-x}x^{s-1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On pose alors $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$.

1b. Calculer $\Gamma(m)$ pour m entier strictement positif.

1c. Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

2a. Montrer que pour tout entier strictement positif m et pour $x \in [0, m]$, $\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \leq e^{-x}$.
Montrer que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}$.

2b. Montrer que $\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1} dx = \frac{m! m^s}{s(s+1) \cdots (s+m)}$, pour tout réel $s > 0$ et pour tout entier m . (On pourra procéder par intégrations par parties successives).

2c. Montrer que pour tout réel $s > 0$, $\Gamma(s) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m! m^s}{s(s+1) \cdots (s+m)}$.

Deuxième partie : matrices positives et produit de Hadamard

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On dit que A est positive si A est symétrique et

$$\forall X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \langle X, AX \rangle = {}^tXAX = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}x_ix_j \geq 0$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien standard sur \mathbf{R}^n .

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{SM}_2(\mathbf{R})$. Montrer que A est positive si et seulement si $a \geq 0, d \geq 0$, $\det(A) \geq 0$.

4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$. Montrer que A est positive si et seulement si ses valeurs propres sont des réels positifs ou nuls.

5. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ une matrice positive, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels. Montrer que, posant $b_{ij} = \lambda_i \lambda_j a_{ij}$, la matrice $B = (b_{ij})$ est positive.

6. Soit \mathcal{H} un espace vectoriel préhilbertien réel, pour lequel le produit scalaire de deux éléments $x, y \in \mathcal{H}$ est noté $\langle x, y \rangle$. Soient $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{H}$. On pose $a_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$. Montrer que la matrice $A = (a_{ij})$ est positive.

Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Leur produit de Hadamard est la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ donné par : $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$. On désignera cette opération par le signe $*$: $C = A * B$.

7. Montrer que si $A \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ est une matrice positive et si B est une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs ou nuls, alors $A * B$ est une matrice positive.

8a. Montrer que si $A \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ est une matrice positive, elle peut s'écrire comme somme de matrices de la forme $Y {}^tY = {}^t(y_1, \dots, y_n)(y_1, \dots, y_n)$, où $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. On pourra commencer par le cas où A est diagonale.

8b. Montrer que si $A, B \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ sont des matrices positives, alors $A * B$ est une matrice positive.

Troisième partie : matrices infiniment divisibles

On considère maintenant des matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls. Il résulte de la question **8b.** que si A est positive, alors pour tout entier $r > 0$, la matrice $A^{*r} = (a_{ij}^r)$ est positive. On dit qu'une matrice symétrique A à coefficients a_{ij} positifs ou nuls est infiniment divisible si pour tout réel $r > 0$, la matrice (a_{ij}^r) est positive. On désignera encore, lorsque r est un réel strictement positif, par A^{*r} la matrice (a_{ij}^r) .

9a. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive à coefficients positifs ou nuls. Montrer qu'elle est infiniment divisible.

9b. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est positive. Déterminer les valeurs de $r > 0$ pour lesquelles A^{*r} est positive.

10. Montrer que si $A = (a_{ij})$ est infiniment divisible et si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels strictement positifs, alors posant $b_{ij} = \lambda_i \lambda_j a_{ij}$, la matrice $B = (b_{ij})$ est infiniment divisible.

11. Soit A une matrice symétrique à coefficients positifs ou nuls. Montrer que si pour tout entier $m \geq 1$, $A^{*\frac{1}{m}}$ est positive, alors A est infiniment divisible.

12. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels strictement positifs. On forme la matrice $C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}$ et on se propose de montrer qu'elle est infiniment divisible.

Soit \mathcal{H} l'espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbf{R}_+ à valeurs réelles, dont le carré est intégrable. On munit \mathcal{H} du produit scalaire : pour $f, g \in \mathcal{H}$, $\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$. On pose, pour tout $t \geq 0$, $u_i(t) = e^{-\lambda_i t}$.

12a. Calculer $\langle u_i, u_j \rangle$ et en déduire que C est positive.

12b. Montrer que pour $r > 0$ et $\alpha > 0$, $\frac{1}{\alpha^r} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} e^{-t\alpha} t^{r-1} dt$.

12c. Soit, pour $r > 0$, \mathcal{H}_r l'ensemble des fonctions continues u sur \mathbf{R}_+ à valeurs réelles telles que la fonction $t \mapsto u(t)^2 t^{r-1}$ est intégrable sur \mathbf{R}_+ . On admet que c'est un espace vectoriel. Montrer que si on pose, pour $u, v \in \mathcal{H}_r$, $\langle u, v \rangle = \int_0^{+\infty} u(t)v(t)t^{r-1} dt$, on munit \mathcal{H}_r d'un produit scalaire.

12d. Montrer que C est infiniment divisible.

13. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels strictement positifs. Pour $1 \leq i, j \leq n$ on pose $k_{ij} = \frac{\Gamma(\lambda_i + \lambda_j + 1)}{\Gamma(\lambda_i + 1)\Gamma(\lambda_j + 1)}$. On se propose de montrer que la matrice $K = (k_{ij})$ est infiniment divisible.

13a. Montrer que $k_{ij} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m \cdot m!} \prod_{p=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{(\lambda_i + \lambda_j + p)}$.

13b. Montrer que pour tout entier $p \geq 1$, la matrice $\left(\frac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{(\lambda_i + \lambda_j + p)} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est infiniment divisible. Conclure.

Quatrième partie : matrices conditionnellement positives

On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est conditionnellement positive si elle est symétrique et si pour tout $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, on a

$${}^tXAX = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}x_i x_j \geq 0.$$

14. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels strictement positifs. Posons $a_{ij} = -\ln(\lambda_i + \lambda_j)$. Montrer que $A = (a_{ij})$ est conditionnellement positive. (Pour $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, on pourra introduire la fonction définie sur \mathbf{R}_+ par :

$$f(r) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \right)^r$$

et utiliser les résultats de la question **12.**).

15. Notons J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit $B \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$. Considérons les deux conditions suivantes :

- (i) B est conditionnellement positive.
- (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0$ tel que la matrice $B + \varepsilon I_n + \lambda J$ est positive.

Montrer que (ii) implique (i).

On admettra dans la suite que ces deux conditions sont en fait équivalentes.

16a. On suppose que $A = (a_{ij})$ est infiniment divisible et que tous les coefficients de A sont strictement positifs. Montrer que la matrice $(\ln a_{ij})$ est conditionnellement positive.

16b. Réciproquement, supposons que la matrice $B = (b_{ij})$ est conditionnellement positive. En considérant pour tout $\varepsilon > 0$ une matrice $C = (c_{ij}) = B + \varepsilon I_n + \lambda J$ comme au **15.**, montrer que pour tout $r > 0$, la matrice $(\exp(rc_{ij}))$ est positive. En déduire que la matrice $(\exp(rb_{ij}))$ est positive.

17a. Soient z_1, \dots, z_n des nombres complexes. Montrer que la matrice $(e^{-|z_i - z_j|^2})$ est infiniment divisible.

17b. Soient z_1, \dots, z_n des nombres complexes. Montrer que pour tout $t > 0$, la matrice de coefficients $\frac{1}{t + |z_i - z_j|^2}$ est positive, puis que la matrice de coefficients $-\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \frac{|z_i - z_j|^2}{t + |z_i - z_j|^2} dt$ est conditionnellement positive.

17c. Montrer que la matrice $(e^{-|z_i - z_j|})$ est infiniment divisible.

* *
*