

Chapitre 15 — probabilités

1 Espaces probabilisés

1.1 Tribu

Une *tribu* sur un ensemble Ω est un sous-ensemble \mathcal{A} de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui possède Ω pour élément, stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable.

Propriétés : $\emptyset \in \mathcal{A}$, stabilité par intersection dénombrable, stabilité par réunion finie, stabilité par intersection finie.

L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω .

Un *espace probabilisable* est un couple d'ensembles (Ω, \mathcal{A}) tel que \mathcal{A} soit une tribu sur Ω . Les éléments de \mathcal{A} sont appelés *événements*.

Système complet d'événements dénombrable.

1.2 Probabilité sur un espace probabilisable

Une *probabilité* sur un espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) est une fonction \mathbb{P} définie sur \mathcal{A} , à valeurs réelles positives, telle que $\mathbb{P}(\Omega)$ soit égal à 1 et telle que la relation

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

soit valable pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'événements deux à deux incompatibles (propriété de σ -additivité).

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est alors un *espace probabilisé*.

Les formules présentées dans le cas d'un espace probabilisé fini demeurent vraies dans ce contexte.

Exemple : probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ dans le cas où Ω est dénombrable.

Continuité croissante. Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante (pour l'inclusion) d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Continuité décroissante. Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante (pour l'inclusion) d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Sous-additivité. Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite quelconque d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Événement presque sûr. Événement négligeable. Système quasi complet d'événements.

1.3 Conditionnement et indépendance

Définition de $\mathbb{P}(A|B)$, également notée $\mathbb{P}_B(A)$, dans le cas où $\mathbb{P}(B)$ est non nul. La fonction \mathbb{P}_B est alors une probabilité sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}) .

Formule des probabilités composées.

Formules des probabilités totales

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B) \mathbb{P}(A_n).$$

Formule de Bayes.

Indépendance de deux événements. Si $\mathbb{P}(B)$ n'est pas nul, l'indépendance de A et B équivaut à $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements. L'indépendance des événements deux par deux ne suffit pas s'il y a au moins trois événements.

Conservation de l'indépendance par passage au complémentaire.

2 Variables aléatoires discrètes

2.1 Variable aléatoire discrète

Une *variable aléatoire discrète* X sur l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) est une fonction définie sur Ω telle que l'univers image $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et telle que pour tout x de $X(\Omega)$, l'image réciproque $X^{-1}(\{x\})$ soit un élément de \mathcal{A} (c'est-à-dire un événement).

Pour toute partie U de l'univers image $X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(U)$ est un événement.

L'événement $X^{-1}(U)$ est noté $[X \in U]$ ou $(X \in U)$ ou $\{X \in U\}$.

Stabilité par combinaison linéaire et par produit. Si f est une fonction définie sur $X(\Omega)$, alors $f(X)$ est une variable aléatoire.

2.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Loi P_X d'une variable aléatoire discrète X .

La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

La notation $X \sim Y$ signifie que les variables aléatoires X et Y suivent la même loi.

Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Loi géométrique. Notation $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Loi de Poisson. Notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

2.3 Couple de variables aléatoires discrètes

Loi conjointe. Lois marginales.

Loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$.

Loi de $X + Y$.

Si (X, Y) et (U, V) suivent la même loi, alors $f(X, Y)$ et $f(U, V)$ suivent la même loi. Cas de la somme et du produit.

2.4 Indépendance

Dire que les variables aléatoires X et Y sont *indépendantes* signifie que pour toutes parties A de $X(\Omega)$ et B de $Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}([X \in A] \cap [Y \in B]) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.

L'indépendance de X et de Y équivaut à l'identité

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y).$$

Loi de $X + Y$. Cas de la loi de Poisson. Cas de la loi géométrique.

Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toutes fonctions f et g telles que $f(X)$ et $g(Y)$ soient bien définies, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Loi conjointe d'un n -uplet (X_1, \dots, X_n) de variable aléatoires. Variable aléatoire de la forme $f(X_1, \dots, X_n)$.

Variations aléatoires mutuellement indépendantes. Suites de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Jeu de pile ou face infini.

Loi de $\max(X_1, \dots, X_n)$.

Lemme des coalitions : si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

Exemples de généralisations.

3 Moments

3.1 Espérance

L'espérance d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[0, +\infty]$ est l'élément $\mathbb{E}(X)$ de $[0, +\infty]$ défini par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x).$$

Additivité. Croissance. Cas d'une espérance nulle. Théorème du transfert.

Dans le cas où X est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, identité

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

Cas des lois de Poisson et des lois géométriques.

Pour une variable aléatoire discrète complexe X , dire que X est d'espérance finie signifie que la famille $(x \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\omega)}$ est sommable. Dans ce cas, l'espérance de X est la somme de cette famille.

Variable aléatoire centrée.

Formule du transfert : la variable aléatoire est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x) \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x).$$

L'existence de $\mathbb{E}(X)$ équivaut à ce que $\mathbb{E}(|X|)$ soit finie.

Critère de domination : si $|X| \leq Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie aussi.

Positivité. Croissance de l'espérance.

Si X est positive et $\mathbb{E}(X) = 0$, alors X est presque sûrement nulle.

La formule du transfert s'applique aussi aux couples de variables aléatoires pour calculer $\mathbb{E}(f(X, Y))$.

Cas de $\mathbb{E}(X + Y)$: linéarité de l'espérance.

Cas de $\mathbb{E}(XY)$. Dans le cas où X et Y sont indépendantes et d'espérance finie, la variable aléatoire XY est d'espérance finie et on a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Généralisation au produit de n variables aléatoires indépendantes.

3.2 Variance et covariance

Dans ce paragraphe, les variables aléatoires sont discrètes et à valeurs réelles.

Si X^2 est d'espérance finie, alors X aussi.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY aussi et $\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X)^2 \mathbb{E}(Y)^2$.

Le cas d'égalité équivaut à ce que X et Y soient presque sûrement proportionnelles.

Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète X telle que X soit d'espérance finie.

Identité $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Identité $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$. Variable réduite.

Covariance. Relation $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Variance d'une somme finie. Cas où les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes.

Inégalité de Cauchy-Schwarz $\text{Cov}(X, Y)^2 \leq \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$.

3.3 Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières

La *série génératrice* d'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} est la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)t^n.$$

Le rayon de convergence vaut au moins 1 et la série entière ci-dessus converge normalement sur $[-1, 1]$. La *fonction génératrice* de X est alors la fonction

$$G_X : t \mapsto \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n.$$

Cette fonction est continue sur $[-1, 1]$ et de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.

L'égalité $G_X = G_Y$ équivaut à ce que X et Y aient la même loi.

L'existence de $\mathbb{E}(X)$ équivaut à la dérivabilité de G_X en 1. Dans ce cas, l'espérance de X vaut $G'_X(1)$.

Dans le cas où le rayon de convergence est strictement supérieur à 1, on remarque qu'on peut calculer l'espérance de X^2 au moyen de $G''_X(1)$, puis $\mathbb{V}(X)$.

Fonction génératrice G_{X+Y} dans le cas où X et Y sont indépendantes. Généralisation.

Cas des lois binomiales et des lois de Poisson.

4 Lois usuelles

4.1 Loi géométrique

Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Fonction génératrice, espérance et variance.

Elle modélise le rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p .

4.2 Loi de Poisson

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Fonction génératrice, espérance et variance.

Somme de deux variables indépendantes suivant une loi de Poisson. Généralisation.

4.3 Complément : loi binomiale négative

Loi de la somme $X_1 + \dots + X_m$, où les X_i sont mutuellement indépendantes et suivent la loi $\mathcal{G}(p)$.

Interprétation : rang du m -ième succès dans une suite infinie de pile ou face.

5 Inégalités probabilistes

5.1 Inégalités

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Application à l'obtention d'inégalités de concentration.

5.2 Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. On suppose que $(X_1)^2$ est d'espérance finie.

On note $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Interprétation : la moyenne expérimentale est probablement proche de la moyenne théorique.

Programme de colles n° 12 (du lundi 17 au vendredi 28 mars 2025)

Tout ce chapitre.