Exercice 1. (*) On lance n fois une pièce.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on considère les événements P_k = [On a fait `pile` au k-ième lancer.] et F_k = [On a fait `face` au k-ième lancer.]. Exprimer à l'aide des événements de la forme P_k et F_k les événements suivants :

A = [On a fait `pile` à tous les lancers.] ;
B = [On a fait `pile` à au moins un lancer.] ;
C = [On a fait `pile` à au moins un lancer, mais pas au cours des deux premiers.] ;
D = [On a fait `pile` pour la première fois à l'avant-dernier lancer.] ;
E = [On n'a jamais obtenu la succession `(pile, face)`.] ;
F = [On a fait `pile` exactement une fois.] ;
G = [On a fait `pile` exactement deux fois.].

Exercice 2. (*) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de $\dfrac{1}{\mathrm{X}+1}$.

Exercice 3. (*) On lance deux dés équilibrés à n faces. Les résultats sont modélisés par deux variables aléatoires U_1 et U_2, supposées indépendantes.

On pose $\mathrm{X} = \min(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$ et $\mathrm{Y} = \max(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$.

a. Déterminer la loi et l'espérance de X.

b. Calculer $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire l'espérance de Y.

c. Calculer de même XY et en déduire la covariance de (X, Y).

Exercice 4. (**) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère des variables aléatoires $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_k$ indépendantes, de loi uniforme sur l'ensemble $\{-1; 1\}$. On note

$$\mathrm{S}_k = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{U}_i.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(\lambda) = \ln\big(\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{U}_1})\big)$.

a. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, prouver l'inégalité $\varphi(\lambda) \leqslant \lambda^2/2$.

b. (***) Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $\lambda > 0$, prouver l'inégalité $\mathbb{P}(\mathrm{S}_k \geqslant t) \leqslant \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t)$.

c. En déduire l'inégalité de Hoeffding

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(\mathrm{S}_k \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right).$$

Exercice 5. (*) On considère une suite infinie de tirages à pile ou face avec une pièce équilibrée. On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Les tirages sont supposés mutuellement indépendants.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note P_n l'événement ≪ *Le n-ième lancer a donné pile.* ≫ et on note F_n son événement contraire.

Pour tout entier n, on note D_n l'événement ≪ *Lors des n premiers lancers, il n'y a pas eu deux lancers consécutifs qui aient donné pile.* ≫ La probabilité de l'événement D_n est notée d_n.

a. Calculer d_0, ainsi que d_1 et d_2.

b. Établir la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad d_{n+2} = \frac{1}{2} d_{n+1} + \frac{1}{4} d_n.$$

c. En déduire une expression de d_n en fonction de n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$. Interpréter.

Exercice 6. (*) On se place dans le même contexte que l'exercice précédent. Albertine et Barnabé jouent à un jeu basé sur l'observation des résultats des lancers de la pièce. Albertine gagne si une succession `(pile, pile, face)` apparaît avant qu'une succession `(face, pile, pile)` n'apparaisse. Barnabé gagne si une succession `(face, pile, pile)` apparaît avant qu'une succession `(pile, pile, face)` n'apparaisse. Si aucune de ces successions ne se produit, aucun des deux ne gagne.

Le but de cet exercice est de déterminer lequel des deux personnages a le plus de chances de gagner.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note N_n l'événement « *Aucun des deux joueurs n'a gagné à l'issue des n premiers lancers.* »

Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{N}_1)$ et $\mathbb{P}(\mathrm{N}_2)$.

b. Pour tout entier $n \geqslant 3$, prouver l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{N}_n) = 2^{-n} + d_n$.

c. En déduire que la probabilité d'un match nul est nulle.

d. Calculer la probabilité de victoire d'Albertine. En déduire celle de Barnabé. Commenter.

Exercice 7. (*) Déterminer les variables aléatoires discrètes indépendantes d'elles-mêmes.

Exercice 8. (*) Montrer qu'en posant $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la loi d'une variable aléatoire discrète X. Calculer son espérance. La variable aléatoire $(-1)^{\mathrm{X}}\,\mathrm{X}$ est-elle d'espérance finie ?

Exercice 9. (*) Montrer que si X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, alors la valeur maximale de $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k)$ est atteinte pour $k = \lfloor \lambda \rfloor$.

Exercice 10. (*) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbb{E}(1/(\mathrm{X}+1))$.

Exercice 11. (*) Soit $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$. Calculer $\mathbb{E}(1/\mathrm{X})$.

Exercice 12. (*) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) > 0$ et on note $\mathbb{E}(\mathrm{Z}|\mathrm{X} = k)$ l'espérance de Z pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(\mathrm{X}=k)}$.

Justifier l'égalité $\mathbb{E}(\mathrm{Z}) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathrm{Z}|\mathrm{X} = k)\mathbb{P}(\mathrm{X} = k)$.

Cette identité s'appelle *formule de l'espérance totale.*

Exercice 13. (**) Soit $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. On considère une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Z sachant $[\mathrm{X} = k]$ soit uniforme sur $[\![0, k-1]\!]$.

a. Donner $\mathbb{P}_{[\mathrm{X}=k]}(\mathrm{Z} = j)$ pour tout $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

b. Déterminer la loi de Z (sans chercher à simplifier les sommes obtenues).

c. En déduire un calcul de $\mathbb{E}(\mathrm{Z})$.

d. Retrouver ce résultat au moyen de la formule de l'espérance totale.

Exercice 14. (*) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On note Z le maximum des nombres X et Y. On pose $\mathrm{S} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ et $\mathrm{D} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$.

a. Justifier que Z est une variable aléatoire. Déterminer sa loi et son espérance.

b. Déterminer les lois de S et de D.

c. Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

Exercice 15. (**) Soit p dans $]0,1[$. Soit $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{T}_k$.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, déterminer la fonction génératrice de S_n. En déduire sa loi.

b. Déterminer la loi de T_1 sachant $[\mathrm{S}_2 = k]$. Interprétation.

c. Pour tout $n \geqslant 2$, calculer l'espérance de $\dfrac{n-1}{\mathrm{S}_n - 1}$.

Exercice 16. (*) On considère deux variables X et Y indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.

a. Montrer que $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

b. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[\mathrm{X}+\mathrm{Y} = n]$. Reconnaître une loi usuelle.

Exercice 17. (*) On considère deux variables aléatoires X et Z. On suppose que Z suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et que pour tout entier naturel n la loi de X sachant $[\mathrm{Z} = n]$ est $\mathcal{B}(n,p)$.

Montrer que X suit une loi de Poisson et préciser son paramètre.

Exercice 18. (**) On considère un vecteur aléatoire (X,Y) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, dont l'univers image est

$$(\mathrm{X},\mathrm{Y})(\Omega) = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad 0 \leqslant i \leqslant j\}$$

et pour lequel il existe deux constantes $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in]0,1[$ telles que la loi du couple (X,Y) soit donnée par

$$\forall (i,j) \in (\mathrm{X},\mathrm{Y})(\Omega), \quad \mathrm{P}((\mathrm{X},\mathrm{Y}) = (i,j)) = \alpha p^j.$$

1. Exprimer en fonction de p et α la loi marginale de X. En déduire la valeur de α en fonction de p.

2. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $\mathrm{X}+1$. En déduire $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X})$.

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4. On pose $\mathrm{Z} = \mathrm{Y} - \mathrm{X}$. Montrer que Z a la même loi que X. En déduire l'espérance de Y.

5. Montrer que X et Z sont indépendantes. En déduire la variance de Y.

6. Pour tout j dans $\mathbb{N}$, déterminer la loi de X sachant $[\mathrm{Y} = j]$.

Exercice 19. (**) Soit $\lambda > 0$. Soit $p \in]0,1[$.
Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Soit Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$.

On considère la matrice aléatoire $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} \\ \mathrm{Y} & \mathrm{X} \end{pmatrix}$. On considère les événements

$$\mathrm{A} = (\mathrm{M} \text{ est diagonalisable}), \quad \mathrm{B} = (\mathrm{M}^4 = \mathrm{I}_2), \quad \mathrm{C} = (\mathrm{M}^{10} = \mathrm{I}_2).$$

Calculer les probabilités de ces événements.

Exercice 20. (**) Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n est $\mathcal{B}(1/n)$.

On pose $\mathrm{T} = \min\{n \in \mathbb{N}^* \ ; \ \mathrm{X}_n = 1, \mathrm{X}_{n+1} = 0\}$.

1. Déterminer la loi de T. On vérifiera en particulier que T est presque sûrement finie.

2. Calculer l'espérance et la variance de T.

Exercice 21. (**) Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On pose

$$\mathrm{A}=\bigcap_{p\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\geqslant p}\mathrm{A}_n.$$

1. On suppose que la série $\sum\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ est convergente. Prouver que $\mathbb{P}(\mathrm{A})$ est nul.

2. On suppose que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ est divergente. On veut prouver que $\mathbb{P}(\mathrm{A})$ vaut 1.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, on introduit l'événement $\mathrm{I}_p=\bigcap_{n\geqslant p}\overline{\mathrm{A}_n}$.

a. Pour tout $x\geqslant 0$, prouver l'inégalité $1-x\leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

b. Soit $p\in\mathbb{N}$. Soit un entier $r\geqslant p$. Prouver l'inégalité $\mathbb{P}\left(\bigcap_{r\geqslant n\geqslant p}\overline{\mathrm{A}_n}\right)\leqslant\exp\left(-\sum_{r\geqslant n\geqslant p}\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\right)$.

c. En déduire que I_p est de probabilité nulle.

d. Conclure. (On a alors démontré le *lemme de Borel-Cantelli.)*

3. On fixe p dans $]0,1[$ et on considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.
On fixe un entier $k\in\mathbb{N}^*$ ainsi qu'un k-uplet $(a_1,\dots,a_k)$ dont les termes valent 0 ou 1. Le but de cette question est de montrer que ce motif apparaît presque sûrement une infinité de fois dans la suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère l'événement

$$\mathrm{A}_n=\bigcap_{i=1}^{k}(\mathrm{X}_{nk+i}=a_i).$$

a. Montrer que les A_n sont mutuellement indépendants.

b. Conclure à l'aide du lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 22. Formule de Wald (**)

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur cet espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes ayant la même loi que X. On pose $\mathrm{S}_n=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{X}_k$.
Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, que l'on suppose indépendante des X_n.

Pour tout $\omega\in\Omega$, on pose $\mathrm{S}(\omega)=\sum_{n=1}^{\mathrm{N}(\omega)}\mathrm{X}_n(\omega)=\mathrm{S}_{\mathrm{N}(\omega)}(\omega)$.

On note en particulier que S prend la valeur 0 lorsque N vaut 0.

a. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, exprimer l'ensemble $(\mathrm{S}=k)$ au moyen d'événements faisant intervenir N et certains X_n. En déduire que S est une variable aléatoire.

b. Exprimer la loi de S.

c. Pour tout $t\in[0,1]$, montrer les égalités

$$\mathrm{G}_{\mathrm{S}}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{N}=n)\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t)\quad\text{puis}\quad\mathrm{G}_{\mathrm{S}}(t)=\mathrm{G}_{\mathrm{N}}(\mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t)).$$

d. On suppose que N et X sont d'espérance finie. Montrer alors que S est d'espérance finie et exprimer son espérance.
