PC* — mathématiques **jeudi 27 février 2025**
Devoir surveillé n° 6 — piste rouge **durée : 4 heures**

Problème I On considère un entier $n \geqslant 2$. Une *matrice binaire* de taille n est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 ou 0. Le coefficient d'une matrice situé sur la i-ième ligne et la j-ième colonne est dit *en position* (i, j).

On note $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des matrices binaires de taille n qui ont exactement deux coefficients 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne. La matrice suivante est un exemple d'élément de $\mathcal{U}_4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le cardinal de l'ensemble $\mathcal{U}_n$ est noté u_n. Par convention, on pose $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.

Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont identifiés aux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui leur sont canoniquement associées.

La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n. La matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 est notée J_n. Le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients valent 1 est noté X_n.

Question 1. Dans les cas $n = 2$ et $n = 3$, exhiber toutes les matrices de $\mathcal{U}_n$ et déterminer les valeurs correspondantes de u_n.

Question 2. Pour toute matrice A de $\mathcal{U}_n$, vérifier que X_n est un vecteur propre de A et préciser la valeur propre associée.

On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{U}_n$ qui possèdent un coefficient 1 en position $(1, 1)$. Le cardinal de $\mathcal{H}_n$ est noté h_n.

Question 3. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{U}_n$ qui possèdent un coefficient 1 en position (i, j) est de cardinal h_n.

Question 4. Justifier l'égalité $\sum\limits_{\mathrm{A} \in \mathcal{U}_n} \mathrm{A} = h_n \mathrm{J}_n$.

Question 5. En déduire l'égalité $u_n = \dfrac{n}{2} h_n$ (si $n \geqslant 2$).

Question 6. Pour tout $(i, j) \in [\![2, n]\!]^2$, on note $\mathcal{K}_n(i, j)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_n$ qui ont des coefficients 1 en position $(1, j)$ et en position $(i, 1)$.

Montrer que le cardinal de $\mathcal{K}_n(i, j)$ est indépendant de (i, j). Ce cardinal est noté k_n dans la suite.

Question 7. Prouver l'égalité $h_n = (n-1)^2 k_n$ (si $n \geqslant 2$).

Question 8. En distinguant les éléments de $\mathcal{K}_n(2, 2)$ selon la valeur de leur coefficient en position $(2, 2)$, montrer l'égalité

$$k_n = u_{n-2} + h_{n-1}$$

si $n \geqslant 4$. Qu'en est-il si n vaut 2 ou 3 ?

Question 9. En déduire une relation de récurrence pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis pour la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général

$$w_n = \frac{u_n}{(n!)^2}.$$

Question 10. Pour tout entier $n \geqslant 2$, justifier l'encadrement $1 \geqslant w_n \geqslant 1/(2n)$. En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$ vaut 1.

Pour tout x dans $]-1, 1[$, on pose maintenant $\mathrm{W}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$.

Question 11. Pour tout x dans $]-1, 1[$, prouver l'égalité $(1-x)\mathrm{W}'(x) = \dfrac{x}{2}\mathrm{W}(x)$.

Question 12. En déduire une expression de la fonction W puis, à l'aide d'un produit de Cauchy, obtenir une expression de w_n sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à simplifier.

Problème II

Dans ce problème, on fixe un entier n strictement positif.

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, donné par $(\mathrm{X}|\mathrm{Y}) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{Y}$.

Pour tout élément $m = (m_1, \dots, m_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on note $m^{\downarrow} = (m_1^{\downarrow}, \dots, m_n^{\downarrow})$ l'élément de $\mathbb{R}^n$ obtenu à partir de m en réordonnant ses coefficients dans l'ordre décroissant.
Par exemple, si $m = (3, 2, -1, 6, 2, 9)$, alors $m^{\downarrow} = (9, 6, 3, 2, 2, -1)$.

Étant donné une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $s^{\downarrow}(\mathrm{M})$ le n-uplet ordonné en décroissant des valeurs propres de M, répétées selon leurs multiplicités.
Par exemple, si $\chi_{\mathrm{M}} = \mathrm{X}^2(\mathrm{X}-1)^3$, alors $s^{\downarrow}(\mathrm{M}) = (1, 1, 1, 0, 0)$.

Première partie

Question 13. Rappeler pourquoi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et donner sa dimension.

Question 14. Pourquoi la fonction $s^{\downarrow}$ est-elle bien définie sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

Question 15. L'application $s^{\downarrow}$ est-elle linéaire ?

Question 16. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Exprimer $s^{\downarrow}(-\mathrm{M})$.

Question 17. On considère une matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \lambda & h \\ h & \mu \end{pmatrix}$ de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Calculer $s^{\downarrow}(\mathrm{M})$.

Question 18. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $m = s^{\downarrow}(\mathrm{M})$.

Montrer qu'il existe une base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i \times v_i^{\mathrm{T}}.$$

Une telle décomposition de M sera appelée *résolution spectrale* de M.

Deuxième partie

Dans cette partie, on fixe une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On reprend les notations $(m_1, \dots, m_n)$ et $(v_1, \dots, v_n)$ de la question précédente.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{V}_k = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ et $\mathcal{W}_k = \mathrm{Vect}(v_k, \dots, v_n)$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $\mathcal{G}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k.

Question 19. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer les égalités

$$\inf_{x \in \mathcal{V}_j,\ ||x||=1} (x|\mathrm{M}x) = m_j \quad \text{et} \quad \sup_{x \in \mathcal{W}_j,\ ||x||=1} (x|\mathrm{M}x) = m_j.$$

Question 20. Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V}) > n$.

Montrer que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \{0\}$.

Question 21. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Soit $\mathcal{V} \in \mathcal{G}_j$. Montrer que

$$\inf_{x \in \mathcal{V},\ ||x||=1} (x|\mathrm{M}x) \leqslant m_j.$$

Question 22. En déduire l'égalité

$$\max_{\mathcal{V} \in \mathcal{G}_j} \inf_{x \in \mathcal{V},\ ||x||=1} (x|\mathrm{M}x) = m_j.$$

Troisième partie

Dans cette partie, on considère deux matrices A et B de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on pose $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$. On pose alors

$$a = s^{\downarrow}(\mathrm{A}), \quad b = s^{\downarrow}(\mathrm{B}), \quad c = s^{\downarrow}(\mathrm{C}).$$

Question 23. Montrer l'égalité $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$.

Question 24. Montrer les inégalités $a_1 + b_1 \geqslant c_1$ et $a_n + b_n \leqslant c_n$.

Question 25. On considère trois sous-espaces vectoriels $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$\dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V}) + \dim(\mathcal{W}) > 2n.$$

Montrer que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \neq \{0\}$.

Question 26. Soient j et k deux éléments de $[\![1, n]\!]$ tels que $j + k \leqslant n + 1$.

En utilisant des résolutions spectrales des matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$, montrer que $c_{j+k-1} \leqslant a_j + b_k$.

Question 27. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, en déduire l'inégalité $a_j + b_n \leqslant c_j$.