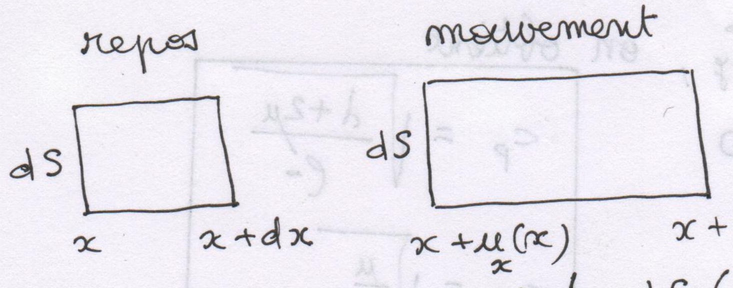
Ondes sismiques

① Comme $\vec{u}$ est un déplacement, $\dfrac{\partial u_x}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u_y}{\partial x}$ sont sans dimension.

Donc λ et μ ont la dimension d'une pression :

$$\underline{[\lambda] = [\mu] = ML^{-1}T^{-2}}$$

②



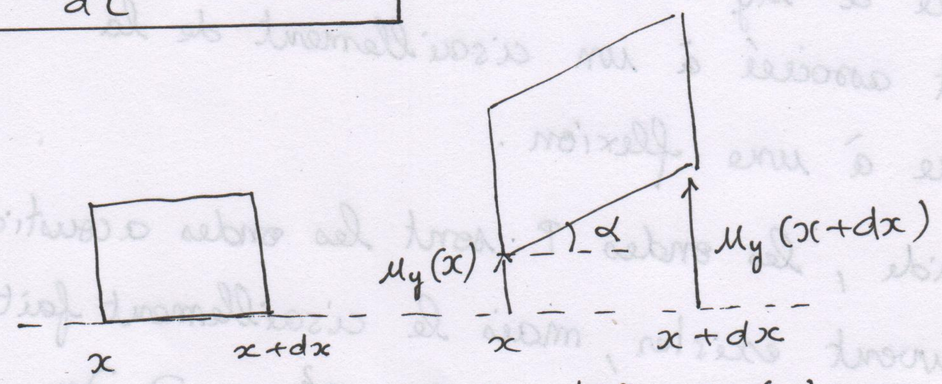
$$d\tau = dS\,dx \qquad d\tau' = dS\left(dx + u_x(x+dx) - u_x(x)\right)$$

$$= dS\,dx\left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)$$

$$d\tau' - d\tau = d\tau\,\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{d\tau' - d\tau}{d\tau} = \frac{\partial u_x}{\partial x}}$$: taux de variation du volume.

③



$$\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{u_y(x+dx) - u_y(x)}{dx}$$

$$\boxed{\alpha \simeq \frac{\partial u_y}{\partial x}}$$: pente de l'élément déformé.

④ L'élément subit $d\vec{F}_{12}(x)$ et, d'après le principe des actions réciproques, $-d\vec{F}_{12}(x+dx)$.

$$d\vec{F} = \vec{f}_{12}(x)\,dS - \vec{f}_{12}(x+dx)\,dS$$

$$= -dS\,dx\,\frac{\partial \vec{f}_{12}}{\partial x}$$

$$= d\tau\left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\,\vec{e}_x + \mu\,\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}\,\vec{e}_y\right)$$

$$\vec{f}_v = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\,\vec{e}_x + \mu\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}\,\vec{e}_y$$

(5) On applique le pfd à l'élément :

$$\rho_0\, d\tau \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = d\vec{F} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\,\vec{e}_x\, d\tau + \mu\, d\tau \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}\,\vec{e}_y$$

En projetant sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, on obtient

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{\rho_0}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{\rho_0}{\mu}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 0$$

$$\boxed{c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}} \qquad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}}$$

(6) L'onde P associée à u_x est longitudinale. D'après la question 2, elle est associée à une variation du volume, d'où l'appellation « onde de compression ».

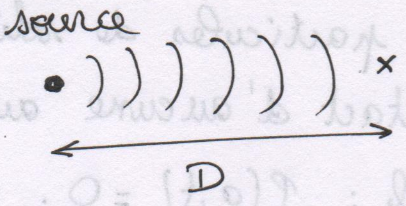
L'onde S associée à u_y est transversale. D'après la question 3, elle est associée à un cisaillement de la matière, analogue à une flexion.

(7) Dans un liquide, les ondes P sont les ondes acoustiques. Les ondes S peuvent exister, mais le cisaillement fait apparaître des forces visqueuses. En effet, $\frac{\partial^2 u_y}{\partial t\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial t}$.

$\frac{\partial u_y}{\partial t} = v$: vitesse. D'après la loi de Newton, $dF_v = \eta\frac{\partial v}{\partial x} = \eta\frac{\partial^2 u_y}{\partial t\,\partial x}$.

Les ondes S s'amortissent donc par viscosité.

(8) $t_s = \dfrac{D}{c_s}$ $t_p = \dfrac{D}{c_p}$



$$\Delta t = t_s - t_p = D\left(\frac{1}{c_s} - \frac{1}{c_p}\right)$$

$$\boxed{D = \frac{\Delta t}{\frac{1}{c_s} - \frac{1}{c_p}}}$$

$$\delta D = \frac{\delta(\Delta t)}{\frac{1}{c_s} - \frac{1}{c_p}}$$

(9) $\underline{D = 882 \text{ km}}$

$$\delta(\Delta t) = \left(\frac{1}{c_s} - \frac{1}{c_p}\right)\delta D \qquad \underline{\delta(\Delta t) = 79 \text{ ms}}$$

(10) Question de cours. On pose $y(x,t) = A\,(kx+\varphi)\cos(\omega t+\psi)$. Les conditions de bord $y(0,t) = 0$ et $y(L,t) = 0$ conduisent à $\varphi = 0$ et $k = n\dfrac{\pi}{L}$. Les fréquences propres sont

$f_n = \dfrac{c\,k_n}{2\pi}$ $\boxed{f_n = \dfrac{n\,c}{2L}}$, c célérité des ondes.

(11) Par analogie, sans que ce soit clairement fondé, les fréquences propres de la Terre sont $f_n = n\dfrac{c}{2a}$.

$f_n = n\,f_1$ avec $\boxed{f_1 = \dfrac{c}{2a} \simeq 1 \text{ mHz}}$.

(12) Avec la forme proposée, $r\phi = (A\cos kr + B\sin kr)\cos(\omega t+\varphi)$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) = -k^2(A\cos kr + B\sin kr)\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{r}(A\cos kr + B\sin kr)\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \left(-\frac{k^2}{r} + \frac{\omega^2}{rc^2}\right)(A\cos kr + B\sin kr)\cos(\omega t+\varphi)$$

ϕ est solution de l'équation de d'Alembert ssi

$-\dfrac{k^2}{r} + \dfrac{\omega^2}{rc^2} = 0$ ie $\underline{\omega = \pm c k}$.

13) Les particules de solides situées à la surface ne sont au contact d'aucune autre particule, donc la contrainte s'annule : $P(a,t) = 0$. Comme P est proportionnelle à ϕ, $\phi(a,t) = 0$.

Pour $r = 0$, $r\phi(r,t) = 0 \times \phi(0,t) = 0$.

Ces conditions de bord s'écrivent :

$$\begin{cases} \forall t, \ (A\cos ka + B\sin ka)\cos(\omega t + \varphi) = 0 \\ \forall t, \ (A\cos(k\times 0) + B\sin(k\times 0))\cos(\omega t+\varphi) = 0. \end{cases}$$

On en déduit $A = 0$ puis $B\sin ka = 0$, avec $B \neq 0$, donc $\sin ka = 0$ et $k_n = n\frac{\pi}{a}$.

$\omega_n = n\frac{c\pi}{a}$ $\quad \boxed{f_n = n\frac{c}{2a}}$ comme prévu plus haut.

14) $f_{max} = 10\frac{c}{2a}$. Le critère de Shannon impose

$f_{max} \leq \frac{f_e}{2}$ donc $f_e \geqslant 10\frac{c}{a}$ $\quad \underline{f_e \geqslant 15 \text{ mHz}}$.

La résolution spectrale doit permettre de distinguer des fréquences éloignées de $\frac{c}{2a}$. Or cette résolution est donnée par $\delta f = \frac{1}{T_a}$. $\delta f < \frac{c}{2a} \longrightarrow T_a \geqslant \frac{2a}{c}$ $\quad \underline{T_a \geqslant 13.10^3 \text{ s}}$

15) $\vec{u}_n = \vec{\nabla}\phi_n$ avec $\phi_n = \frac{B_n}{r}\sin(k_n r)\cos(\omega_n t + \varphi_n)$

$$\vec{u}_n = B_n\cos(\omega_n t + \varphi_n)\left(-\frac{\sin k_n r}{r^2} + \frac{k_n\cos k_n r}{r}\right)\vec{e_r}$$

(16) Les noeuds sont définis par $\bar{u}_n = 0$ donc

$$\frac{k_n}{r} \cos k_n r = \frac{1}{r^2} \sin k_n r$$

$$\tan(k_n r) = k_n r \qquad \boxed{\tan\left(\frac{n\pi r}{a}\right) = \frac{n\pi r}{a}}.$$

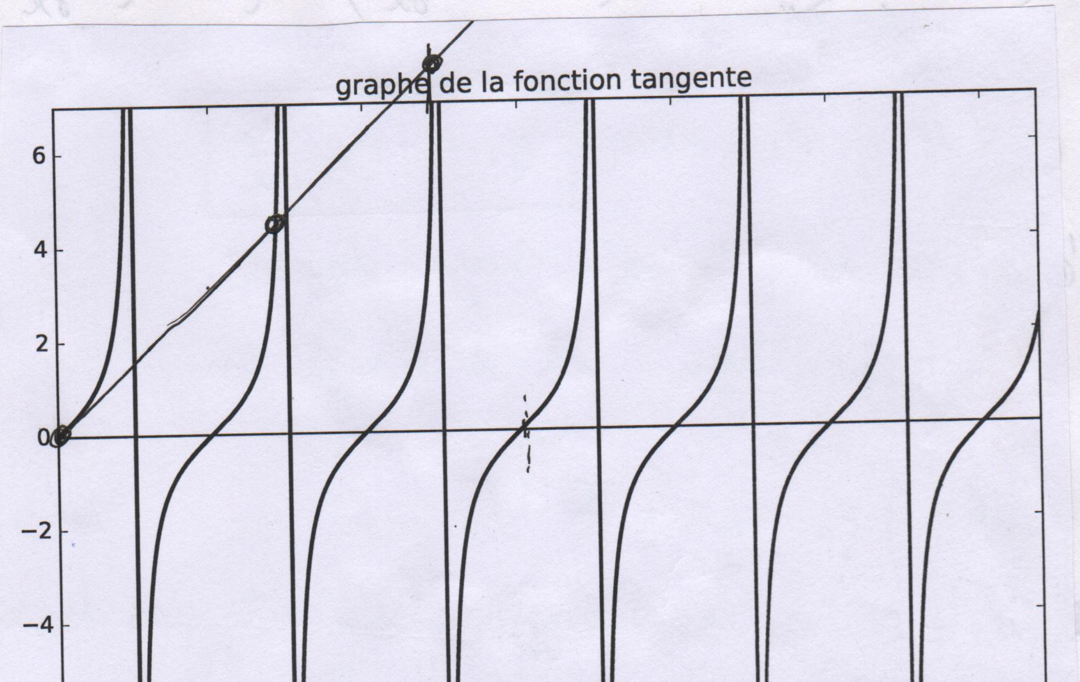
On pose $X = \frac{n\pi r}{a}$. Comme $r \in [0, a]$, $X \in [0, n\pi]$.

On résout $\tan X = X$ sur $[0, n\pi]$ en cherchant les intersections de $Y = \tan X$ et $Y = X$ entre 0, et $n\pi$.

Sur $[0, 3\pi]$, on trouve 3 valeurs $X_0 = 0$, $X_1 \lesssim \frac{3\pi}{2}$, $X_2 \lesssim \frac{5\pi}{2}$, d'où 3 noeuds de rayons $r_i = \frac{a}{3\pi} X_i$:

$$r_0 = 0 \quad , \quad r_1 \lesssim \frac{a}{2} \quad , \quad r_2 \lesssim a \times \frac{5}{6}.$$

Contrairement au cas de la corde, les noeuds ne sont pas équidistants.



On obtient $$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_p^2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \frac{4\pi G \rho_0^2}{\lambda+2\mu} u_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0 .$$

20) Pour u_y, on a une équation de d'Alembert et on trouve $\omega^2 = c_s^2 k^2$. $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c_s$.

Pour les ondes P (pour u_x), on obtient

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_p^2} + \frac{4\pi G}{\lambda+2\mu}\rho_0^2 = \frac{\omega^2}{c_p^2} + \frac{4\pi G\rho_0}{c_p^2}$$

$$\omega^2 = c_p^2 k^2 - 4\pi G \rho_0$$

$$\omega^2 = c_p^2 k^2 \left(1 - \frac{4\pi G \rho_0}{c_p^2 k^2}\right)$$

21)

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c_p \left(1 - \frac{4\pi G\rho_0}{c_p^2 k^2}\right)^{1/2}$$

Comme $k = \frac{2\pi}{\Lambda}$, $v_\varphi = c_p\sqrt{1 - \frac{\Lambda^2}{\Lambda_g^2}}$ avec

$$\boxed{\Lambda_g = \frac{\pi c_p^2}{G\rho_0}}$$

22) $\Lambda_g = 2.10^4$ km

Dans la partie précédente, $\Lambda = \frac{2a}{n}$ avec $2a \simeq 10^4$ km.

Λ et Λ_g sont du même ordre de grandeur et la correction gravitationnelle est sensible. Elle l'est moins pour les modes de rang n élevé.