

Régularité des fonctions

Exercice 1. (*) On pose $f(x, y) = 0$ si $y = 0$ et $f(x, y) = y + x \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ sinon.

Montrer que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ existent mais pas $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$.

Exercice 2. (*) On pose $f(x, y) = (x^2 - y^2) \ln(x^2 + y^2)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $f(0, 0) = 0$.

Montrer que la fonction f est continue sur \mathbb{R}^2 . Est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?

Exercice 3. (*) On pose $f(x, y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?

Exercice 4. ()** Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $q(x, y) = \frac{1 + xy}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}$.

- a. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, simplifier l'expression $1 - q(x, y)^2$.
- b. En déduire que la fonction $f : (x, y) \mapsto \text{Arccos}(q(x, y))$ est définie et continue sur \mathbb{R}^2 .
- c. Sur un ensemble \mathcal{D} à préciser, calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f .
- d. En déduire une simplification de l'expression $f(x, y)$. Interpréter géométriquement.

Exercice 5. ()** On considère la fonction \det , définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, interprétée comme une fonction de n^2 variables.

- a. Déterminer la différentielle de cette fonction en I_n .
- b. Déterminer la différentielle de cette fonction en une matrice A quelconque.

Extremums

Exercice 6. (*) On définit de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} la fonction $f : (x, y) \mapsto xy(1 - x - y)$.

- a. Représenter l'ensemble $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 ; 1 - x - y \geq 0\}$.
- b. Montrer que f admet sur D un maximum, que l'on déterminera.

Exercice 7. (*) Déterminer les extremums sur \mathbb{R}^2 de la fonction $f : (x, y) \mapsto (x^2 - y^2) \exp(-x^2 - y^2)$.

Exercice 8. (*) Déterminer les extremums sur $[0, \pi]^2$ de la fonction $f : (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$.

Exercice 9. (*) Trouver les extremums de la fonction $f : (x, y) \mapsto (x - y)^2 - xy$ sur l'ensemble D défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

Exercice 10. ()** On définit sur $[0, +\infty[^2$ une fonction f en posant $f(0, 0) = 0$ et

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x + y)(1 + x)(1 + y)} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0).$$

- a. Montrer que cette fonction est continue.
- b. Trouver les points critiques de f dans l'ouvert $]0, +\infty[^2$.
- c. Pour tout $(x, y) \in ([0, +\infty[^2$ tel que $x + y \geq 8$, montrer la majoration $f(x, y) < 1/8$.
- d. Déterminer les extremums de la fonction f sur $([0, +\infty[^2$.

Exercice 11. ()** Dans cet exercice, on identifie les vecteurs de \mathbb{R}^n à ceux de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On se donne une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et un vecteur B de \mathbb{R}^n . On définit la fonction

$$f : X \mapsto \frac{1}{2} X^T \cdot A \cdot X - B^T \cdot X$$

de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

- a. Exprimer le gradient de f .
- b. Si A est symétrique définie positive, montrer que f possède un minimum et qu'il est atteint en un unique point.
- c. (***) Montrer que f possède un minimum si et seulement si la matrice A est symétrique positive et B est dans l'image de A .

Exercices divers

Exercice 12. ()** On note Ω le complémentaire de l'origine dans \mathbb{R}^2 et on considère une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. On fixe α dans \mathbb{R} .

Dire que la fonction f est *positivement homogène* de degré α signifie qu'elle vérifie l'identité suivante

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \forall t \in]0, +\infty[, \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y).$$

Montrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si elle vérifie l'identité suivante

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

Exercice 13. ()** On note U l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ de \mathbb{R}^n . On se donne une fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles, et on définit sur U la fonction

$$F : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right).$$

- a. Pour tout i dans $[[1, n]]$, exprimer la fonction $\partial^2 F / \partial x_i^2$.
- b. En déduire une expression du laplacien de F , défini par $\Delta F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$.
- c. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f pour que la fonction F soit harmonique (c'est-à-dire de laplacien nul).

Exercice 14. (*)** Soit U un ouvert convexe non vide de \mathbb{R}^n . Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$.

Dire que f est *convexe* signifie que

$$\forall (x_0, x_1) \in U^2, \quad \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1).$$

Étant donné deux éléments x et y de U , on leur associe la fonction

$$g_{x,y} : t \mapsto f((1-t)x + ty),$$

définie de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

Étant donné un élément x de U et un vecteur v de \mathbb{R}^n , on leur associe la fonction

$$h_{x,v} : t \mapsto f(x + tv),$$

définie sur un intervalle de la forme $] -r, r[$ à préciser.

- a. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout couple (x, v) de $U \times \mathbb{R}^n$, la fonction $h_{x,v}$ est convexe sur l'intervalle $] -r, r[$.
- b. Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall (x, y) \in U^2, \quad f(y) \geq f(x) + df(x) \cdot (y - x).$$
- c. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $x \in U$, la matrice $H_f(x)$ est positive.