Exercice 1. (**) Soit $f : [0,+\infty[\to]0,+\infty[$ une fonction. On suppose que f est décroissante et qu'elle vérifie la relation
$$\forall (u,v) \in [0,+\infty[^2, \quad f(u+v) = f(u) \times f(v).$$

Le but de cet exercice est de prouver l'identité
$$\forall u \in [0,+\infty[, \quad f(u) = f(1)^u.$$

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x dans $[0,+\infty[$, prouver la relation $f(nx) = f(x)^n$.

b. Pour tout $q \in \mathbb{Q}_+$, prouver la relation $f(q) = f(1)^q$.

c. Conclure.

Exercice 2. Processus de Poisson (**)

On considère un système mécanique dans lequel surviennent des pannes. On modélise l'occurrence des pannes comme suit. Pour tout t dans $[0,+\infty[$, le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle temporel $[0,t]$ est une variable aléatoire N_t à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère que le système est réparé instantanément après chaque panne. On considère donc ici une famille $(\mathrm{N}_t)_{t\in[0,+\infty[}$ de variable aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Remarquons que la modélisation impose que pour tout t positif et tout $u \geqslant t$, la variable aléatoire $\mathrm{N}_u - \mathrm{N}_t$ soit à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On fait les hypothèses suivantes :

- la variable aléatoire N_0 est égale à 0 ;
- pour tout $t > 0$, le nombre $\mathbb{P}(\mathrm{N}_t = 0)$ appartient à $]0,1[$;
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout $(n+1)$-uplet $(t_0,\dots,t_n)$ croissant d'éléments de $[0,+\infty[$, les variables aléatoires $\mathrm{N}_{t_0}, \mathrm{N}_{t_1} - \mathrm{N}_{t_0}, \dots, \mathrm{N}_{t_n} - \mathrm{N}_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes (*hypothèse d'accroissements indépendants*) ;
- pour tout couple (s,t) d'éléments de $[0,+\infty[$ soumis à la condition $0 \leqslant s < t$, la variable aléatoire $\mathrm{N}_t - \mathrm{N}_s$ a la même loi que N_{t-s} (*hypothèse d'accroissements stationnaires*) ;
- le quotient $\mathbb{P}(\mathrm{N}_h > 1)/h$ tend vers 0 quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives.

1. Pour tout u dans $[0,+\infty[$, on note G_u la fonction génératrice de la variable aléatoire N_u, que l'on définit simplement sur l'intervalle $[0,1]$ par
$$\mathrm{G}_u(s) = \mathbb{E}(s^{\mathrm{N}_u}).$$

On fixe s dans $[0,1]$.

a. Pour tout couple (u,v) d'éléments de $[0,+\infty[$, prouver l'égalité $\mathrm{G}_{u+v}(s) = \mathrm{G}_u(s)\mathrm{G}_v(s)$.

b. Prouver que la fonction $t \mapsto \mathrm{G}_t(s)$ est décroissante sur $[0,+\infty[$.

c. Pour tout $u \geqslant 0$, prouver que $\mathrm{G}_u(s)$ est strictement positif. On pose alors $\theta(s) = -\ln(\mathrm{G}_1(s))$.

d. Pour tout u dans $[0,+\infty[$, prouver l'égalité $\mathrm{G}_u(s) = \mathrm{e}^{-u\theta(s)}$.

e. En déduire que le quotient $(\mathrm{G}_h(s) - 1)/h$ tend vers $-\theta(s)$ quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives.

2. Pour tout s dans $[0,1]$, prouver que le quotient
$$\frac{1}{h}\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{N}_h = k)(s^k - 1)$$
tend vers 0 quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives.

3. En déduire que le quotient $\mathbb{P}(\mathrm{N}_h = 1)/h$ possède une limite finie quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives. Cette limite est notée α.

De plus, pour tout s dans $[0,1]$, prouver l'égalité $\theta(s) = \alpha(1-s)$.

4. En considérant $\mathrm{G}_1(0)$, prouver que α est strictement positif.

5. Pour tout $u > 0$, prouver que la variable aléatoire N_u suit la loi de Poisson de paramètre αu.
