PC* — mathématiques **jeudi 20 mars 2025**
Devoir surveillé n° 7 — piste bleue **durée : 4 heures**

Problème 1 (d'après CC-INP PSI 2024)

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0, la file contient un client. On suppose qu'à chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$, il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant k et 0 sinon.

On suppose que $(\mathrm{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

On repère chaque client par un indice qui donne sont ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice $n = 0$, le premier nouvellement arrivé a pour indice $n = 1$ et ainsi de suite.

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est la fonction notée $\mathrm{G_X}$ définie par

$$\mathrm{G_X}(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = j)t^j.$$

Partie I

On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1.

Question 1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{T}_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$.

Question 2. On note A l'événement « Aucun nouveau client n'arrive jamais dans la file. »

Exprimer cet événement en fonction des événements de la forme $(\mathrm{T}_1 = k)$. En déduire $\mathbb{P}(\mathrm{A})$ puis interpréter.

Question 3. Déterminer le rayon de convergence de la fonction génératrice de T_1 puis calculer sa somme.

Question 4. En déduire l'espérance et la variance de T.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n. On admet que les variables aléatoires T_n sont indépendantes et de même loi que T_1.

On note alors $\mathrm{D}_n = \mathrm{T}_1 + \cdots + \mathrm{T}_n$. Cette variable aléatoire donne le temps d'arrivée du client d'indice n.

Question 5. Calculer l'espérance et la variance de D_n.

Question 6. Exprimer la fonction génératrice $\mathrm{G}_{\mathrm{D}_n}$ de D_n.

Question 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Question 8. En déduire le développement en série entière de la fonction $\mathrm{G}_{\mathrm{D}_n}$.

Question 9. Pour tout $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, justifier l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{D}_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n, \\ \dbinom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$

Partie II

On fixe $a > 0$ et on définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \exp(a(x-1))$.

On s'intéresse au comportement des suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$z_1 \in]0,1[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_{n+1} = f(z_n).$$

Question 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que z_n est un élément de $]0,1[$.

Question 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $z_{n+1} - z_n$ a le même signe de $z_2 - z_1$.

Question 12. Justifier que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ vérifiant l'égalité $f(\ell) = \ell$.

Question 13. On définit une fonction $\psi :]0,1] \to \mathbb{R}$ par $\psi : x \mapsto \ln(x) - a(x-1)$.

Pour tout $x \in]0,1]$, justifier les équivalences

$$\psi(x) \geqslant 0 \iff f(x) \leqslant x \quad \text{et} \quad \psi(x) = 0 \iff f(x) = x.$$

Question 14. Dans cette question, on suppose que $a \geqslant 1$.

14.a. Étudier le signe de la fonction ψ et vérifier qu'elle s'annule uniquement en 1.

14.b. En déduire que la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

Question 15. Dans cette question, on suppose que $a > 1$.

15.a. Étudier le signe de la fonction ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0,1]$, admet exactement deux solutions, l'une d'elle étant 1, l'autre étant notée α (on ne cherchera pas à l'expliciter).

15.b. En distinguant les cas $z_1 \in]0,\alpha]$ et $z_1 \in]\alpha,1[$, montrer que la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers α.

Partie III

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le service a une durée k avec la probabilité $\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

On rappelle qu'initialement, la file contient un unique client : le client d'indice 0.

On note S la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client. Comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et S nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0. La variable aléatoire S est supposée indépendante des X_n.

On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi. Par récurrence, pour tout entier $k \geqslant 2$, on définit les clients du k-ième groupe comme étant les clients qui sont arrivées pendant que ceux du $(k-1)$-ième groupe étaient servis.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note V_k la variable aléatoire égale au nombre de clients du k-ième groupe.

Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si le n-ième groupe est vide, alors l'événement $(\mathrm{V}_k = 0)$ est réalisé pour tout entier $k \geqslant n$.

Question 16. Quelle est la situation concrète décrite par l'événement $\mathrm{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (\mathrm{V}_n = 0)$?

Question 17. Quelle est la loi du nombre N_n de clients qui sont arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1,n]\!]$?

Question 18. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, donner la valeur de $\mathbb{P}(\mathrm{V}_1 = k | \mathrm{S} = n)$.

Question 19. En déduire que V_1 suit une loi de Poisson, dont on précisera le paramètre.

Question 20. On note $z_n = \mathbb{P}(\mathrm{V}_n = 0)$. Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\mathbb{P}(\mathrm{Z})$.

Question 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité $z_{n+1} = \exp(\lambda p(z_n - 1))$.

Question 22. Selon la valeur de λp, déterminer la valeur de $\mathbb{P}(\mathrm{Z})$. Interpréter.

Problème 2

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières (positives) d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0).

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$, il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $\dfrac{k+1}{k+2}$ ou sur le point d'abscisse 0 avec une probabilité $\dfrac{1}{k+2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse du point occupé par le mobile à l'instant n. En particulier, X_0 vaut 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on admet que X_n est une variable aléatoire définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on pose $u_n = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 0)$.

Question 23. Déterminer la loi de X_1.

Question 24. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'univers image de X_n est $\mathrm{X}_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Question 25. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, justifier l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = k) = \dfrac{k}{k+1}\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n-1} = k-1)$.

Question 26. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\forall k \in [\![0, n]\!]$, en déduire l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = k) = \dfrac{1}{k+1}u_{n-k}$.

Question 27. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer l'égalité $\sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{u_j}{n-j+1} = 1$.

Question 28. À l'aide de la relation de la question 25, trouver une relation entre $\mathbb{E}(1 + \mathrm{X}_n)$ et $\mathbb{E}(1 + \mathrm{X}_{n-1})$.

Question 29. En déduire une expression de $\mathbb{E}(\mathrm{X}_n)$ en fonction de $u_1, \ldots, u_n$.

Question 30. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{u_j}{n-j}$ et exprimer $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{u_j}{n-j+1}$ en fonction de u_n.

Question 31. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, démontrer l'inégalité $\dfrac{n-j}{n-j+1} \leqslant \dfrac{n}{n+1}$.

Question 32. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire l'inégalité $u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Question 33. Déterminer finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(\mathrm{X}_n)$.
