PC* — mathématiques **jeudi 20 mars 2025**
Devoir surveillé n° 7 — piste rouge **durée : 4 heures**

Problème 1 (d'après Mines-Ponts PSI 2025, maths 2)

On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de loi uniforme sur l'ensemble à deux éléments $\{-1, 1\}$, ces variables aléatoires étant mutuellement indépendantes et centrées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.

Question 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la variable aléatoire $\dfrac{1+\mathrm{X}_n}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Pour toute la suite, on fixe un entier $n \geqslant 1$. On appelle *chemin* tout $(2n)$-uplet $\gamma = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n})$ dont les composantes valent 1 ou -1.

Pour un tel chemin, on appelle *indice d'égalité* tout entier $k \in [\![1, 2n]\!]$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{k} \varepsilon_i = 0$.

On remarquera qu'un entier k est un indice d'égalité si et seulement si le k-uplet $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ comporte autant de composantes égales à 1 que de composantes égales à -1.

On note $\mathrm{N}_n : \Omega \to \mathbb{N}$ la variable aléatoire qui à tout élément ω de l'univers Ω associe le nombre d'indices d'égalité du chemin $(\mathrm{X}_1(\omega), \ldots, \mathrm{X}_{2n}(\omega))$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on considère l'événement

$$\mathrm{A}_i = \{\omega,\ 2i \text{ est un indice d'égalité de } (\mathrm{X}_1(\omega), \ldots, \mathrm{X}_{2n}(\omega))\}.$$

Question 2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, calculer $\mathbb{P}(\mathrm{A}_i)$.

Question 3. Soit $\ell \in \mathbb{Z}$. En distinguant selon la parité de l'entier $\ell - n$, calculer $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = \ell)$.

On admet sans démonstration le résultat suivant.

Théorème 1. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels non nuls tels que $a_n = \mathrm{o}(b_n)$ quand n tend vers $+\infty$. On suppose que la série de terme général $|b_n|$ est divergente. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \mathrm{o}\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|\right) \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

Question 4. Soient $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres strictement positifs telles $c_n \sim d_n$ et la série de terme général c_n diverge.

À l'aide du théorème 1, justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} d_n$ est divergente et que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sim \sum_{k=1}^{n} d_n \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

Question 5. Exprimer la variable aléatoire N_n en fonction des fonctions indicatrices associées aux événements A_i.

Question 6. En déduire que N_n est d'espérance finie et que son espérance vaut

$$\mathbb{E}(\mathrm{N}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^i} \binom{2i}{i}.$$

Question 7. Montrer que $\dfrac{1}{4^i}\dbinom{2i}{i}$ est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{i-1}^{i} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ quand l'entier i tend vers $+\infty$.

Question 8. En déduire que $\mathbb{E}(\mathrm{N}_n)$ est équivalent à $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

Dans une urne contenant n boules blanches et n boules noires, on procède à des tirages de boules sans remise, jusqu'à vider complètement l'urne. À chaque tirage, on estime que les boules présentes dans l'urne ont la même probabilité d'être piochées.

Pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, dire que k est *un indice d'égalité* signifie qu'après avoir pioché k boules, il reste autant de boules noires que de boules blanches dans l'urne. On remarque que l'entier $2n$ est forcément un indice d'égalité.

On note M_n la variable aléatoire comptant le nombre d'indices d'égalité entre 1 et $2n$.

Pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$, on note B_i l'événement « L'entier i est un indice d'égalité. ».

Question 9. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{B}_i)$.

Question 10. En déduire que $\mathbb{E}(\mathrm{M}_n) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \dfrac{\binom{2i}{i}\binom{2n-2i}{n-i}}{\binom{2n}{n}}$.

On pourrait alors montrer que cette espérance est équivalente à $\sqrt{\pi n}$ quand n tend vers $+\infty$ mais cela nécessiterait une dizaine de questions supplémentaires.

Problème 2 (d'après X-ESPCI-ENS PC 2016)

On définit une fonction $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ en posant $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t) = -t\ln(t)$ pour tout $t \in]0, 1]$.

On fixe un entier $\mathrm{N} \geqslant 2$ et considère l'ensemble

$$\Sigma_\mathrm{N} = \left\{ (p_1, \ldots, p_\mathrm{N}) \in [0, 1]^\mathrm{N} \,;\, \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} p_i = 1 \right\}.$$

Les éléments de Σ_N peuvent être considérés comme des lois de probabilité sur $[\![1, \mathrm{N}]\!]$.

De même, on note Σ_∞ l'ensemble des suites réelles positives $p = (p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de somme 1.

Pour tout $p = (p_1, \ldots, p_\mathrm{N}) \in \Sigma_\mathrm{N}$, on pose $\mathrm{H}_\mathrm{N}(p) = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}} \varphi(p_i)$.

De même, pour toute suite $p = (p_i)_{i \geqslant 1}$ élément de Σ_∞, on pose $\mathrm{H}_\infty(p) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \varphi(p_i)$, ce qui est un élément de $[0, +\infty]$.

Partie I

Question 11. Vérifier que la fonction φ est continue sur $[0, 1]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1]$. Déterminer la limite de φ' en 0.

Question 12. Montrer que Σ_N est une partie fermée, bornée et convexe de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$.

Question 13. Montrer que H_N est positive et continue sur Σ_N.

Question 14. Calculer $\mathrm{H}_\mathrm{N}(p)$ pour $p = (1/\mathrm{N}, \ldots, 1/\mathrm{N})$ (ce qui correspond à la loi uniforme sur $[\![1, \mathrm{N}]\!]$).

Question 15. Soient a et b dans $[0, 1]$ tels que $a < b$. Montrer l'existence de $\varepsilon \in]0, b[$ tel que

$$\forall t \in]0, \varepsilon], \quad \varphi(a + t) + \varphi(b - t) > \varphi(a) + \varphi(b).$$

Question 16. En déduire que H_N atteint sur Σ_N un maximum en un unique point, à déterminer.

Question 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une famille $(\mathrm{X}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $i \in [\![1, \mathrm{N}]\!]$, on pose $p_i = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = i)$ et on suppose que $p_i > 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose alors $u(n, \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\left| \dfrac{1}{n} \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} p_{\mathrm{X}_k} \right) + \mathrm{H}_\mathrm{N}(p) \right| \geqslant \varepsilon \right)$.

Montrer que $u(n, \varepsilon)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Partie II

Question 18. Soit $a \in]0,1[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_i = (1-a)^{i-1}a$. Vérifier que la suite $p = (p_i)_{i \geqslant 1}$ est un élément de Σ_∞ et calculer $\mathrm{H}_\infty(p)$.

Question 19. Le résultat trouvé à la question précédente est noté $e(a)$. Étudier les variations de la fonction e.

Question 20. Soit $\beta \in]0,+\infty[$. Montrer que $\dfrac{1}{n\ln(n)^\beta}$ est équivalent à $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^\beta}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 21. En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Question 22. Trouver un élément p de Σ_∞ tel que $\mathrm{H}_\infty(p) = +\infty$.

Problème 3

On note ℓ^1 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} |u_k|$ converge, que l'on munit de la norme définie par

$$||u|| = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\,.$$

On note $\mathscr{L}$ le sous-ensemble de ℓ^1 dont les éléments sont les suites positives de norme 1

$$\mathscr{L} = \left\{ (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}\ ;\ \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 1 \right\}.$$

Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on lui associe la suite p de terme général $p_k = \mathbb{P}(\{k\})$ et cette suite est alors un élément de $\mathscr{L}$.

Réciproquement, toute suite appartenant à $\mathscr{L}$ est associée à une certaine probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ via cette même formule, si bien que cette correspondance est une bijection.

Si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé quelconque $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telle que l'univers image soit inclus dans $\mathbb{N}$, on rappelle que sa loi est la probabilité $\mathbb{P}^{\mathrm{X}}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}^{\mathrm{X}}(\{k\}) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = k).$$

Dans ce problème, on va donc identifier ces trois notions : suites appartenant à $\mathscr{L}$, probabilités sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, lois de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

L'objectif de ce problème est de préciser une propriété évoquée en cours concernant la convergence de lois binomiales vers une loi de Poisson : cette convergence n'est pas seulement une convergence simple mais une convergence en norme dans l'espace vectoriel normé ℓ^1.

On fixe λ dans $]0,+\infty[$. On note $\mathcal{P}(\lambda)$ la *loi de Poisson* de paramètre λ, c'est-à-dire la suite u de terme général

$$u_k = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!.$$

Pour tout entier n strictement supérieur à λ, on note $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ la loi binomiale de paramètres n et λ/n.

Le but de ce problème est de montrer que $||\mathcal{P}(\lambda) - \mathcal{B}(n, \lambda/n)||$ tend vers 0 quand l'entier n tend vers $+\infty$.

Question 23. Soient p et q deux éléments de $\mathcal{L}$. Prouver l'égalité

$$||p-q|| = 2\left(1-\sum_{k=0}^{+\infty}\min(p_k,q_k)\right).$$

Question 24. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, de lois respectives p et q.

a. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, prouver l'inégalité

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=k,\mathrm{Y}=k) \leqslant \min(p_k,q_k).$$

b. En déduire la majoration $||p-q|| \leqslant 2\mathbb{P}(\mathrm{X}\neq \mathrm{Y})$.

Pour les questions qui suivent, on fixe un entier $n>\lambda$.

On considère des variables aléatoires $\mathrm{Y}_1,\dots,\mathrm{Y}_n$ mutuellement indépendantes suivant chacune la loi $\mathcal{P}(\lambda/n)$ et on pose $\mathrm{Z}_n=\mathrm{Y}_1+\cdots+\mathrm{Y}_n$.

Question 25. Donner, avec justification, la loi de Z_n.

Question 26. Pour tout x dans $[0,1]$, on pose $f(x)=1-(1-x)\mathrm{e}^x$. Montrer que pour tout x dans $[0,1]$, le nombre $f(x)$ est dans $[0,1]$.

On se donne des variables aléatoires $\mathrm{U}_1,\dots,\mathrm{U}_n$ de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(f(\lambda/n))$. On suppose que les variables aléatoires $\mathrm{Y}_1,\dots,\mathrm{Y}_n,\mathrm{U}_1,\dots,\mathrm{U}_n$ sont mutuellement indépendantes.
Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$\mathrm{X}_i=\begin{cases}0 & \text{si } \mathrm{Y}_i=0 \text{ et } \mathrm{U}_i=0\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On note enfin $\mathrm{T}_n=\mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_n$.

Question 27. Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, montrer que X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\lambda/n)$. Quelle est la loi de la variable aléatoire T_n ?

Question 28. Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, établir la majoration $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i\neq \mathrm{Y}_i)\leqslant \lambda^2/n^2$.

Question 29. Prouver la majoration $\mathbb{P}\left(\sum\limits_{i=1}^n \mathrm{X}_i \neq \sum\limits_{i=1}^n \mathrm{Y}_i\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^n [\mathrm{X}_i\neq \mathrm{Y}_i]\right)$.

Question 30. En déduire une majoration de $||\mathcal{P}(\lambda)-\mathcal{B}(n,\lambda/n)||$ et conclure.
