

Chapitre 7 — passage à la limite sous l'intégrale

1 Passage à la limite sous l'intégrale

1.1 Passage à la limite sous l'intégrale par convergence uniforme sur un segment

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

On suppose que pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le segment $[a, b]$.

On suppose aussi que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[a, b]$ vers une certaine fonction f .

Alors la suite de terme général $\int_a^b f_n(t) dt$ converge vers $\int_a^b f(t) dt$.

1.2 Passage à la limite sous l'intégrale dans le cas d'un intervalle quelconque

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle. On fait les hypothèses suivantes.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux.
2. Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I (et indépendante du paramètre n) vérifiant la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t).$$

On peut alors affirmer que les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I et que la suite de terme général $\int_I f_n$ converge vers $\int_I f$ (on peut passer à la limite sous l'intégrale).

Exemples : la suite des intégrales de Wallis converge vers 0 ; limite de $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$ quand n tend vers $+\infty$.

2 Théorèmes d'intégration terme à terme

2.1 Intégration terme à terme par convergence uniforme sur un segment

Dans le cas d'une série de fonctions continues qui converge uniformément sur un segment, on peut intégrer terme à terme. La convergence normale permet souvent de régler le problème très rapidement.

2.2 Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur l'intervalle I .
2. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur l'intervalle I .
3. La somme de cette série de fonctions, notée f , est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I .
4. La série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ est convergente.

Conclusion : la fonction f est intégrable sur l'intervalle I et son intégrale est donnée par

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Exemples : égalité $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et divergence de la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$.

Remarquons que ce théorème n'est pas toujours opérant et qu'il est parfois judicieux de passer par la suite des sommes partielles en concluant avec la convergence dominée. Exemple de la série alternée des intégrales de Wallis.