

Centres colorés

corrigé

1. En passant au logarithme, la relation $\epsilon = K a^n$ devient $\log \epsilon = n \log a + \log K$. Dans le graphe fourni, la droite qui passe près des points a donc pour pente n et pour ordonnée à l'origine $\log K$. En utilisant deux points particuliers $(\log a_1, \log \epsilon_1)$ et $(\log a_2, \log \epsilon_2)$ sur la droite,

$$n = \frac{-0,58}{0,33} = \frac{\log \epsilon_2 - \log \epsilon_1}{\log a_2 - \log a_1} = -1,87 \quad \log K = \log(\epsilon_1) - n \log a_1 = 1,809 \quad K = 64,4 \text{ eV} \cdot \text{\AA}^{-n} \quad .$$

2. Question de cours. On procède par séparation des variable, on établit l'équation

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Phi(M) + V(M) \Phi(M) = E \Phi(M)$$

et on montre que $\Psi(M, t) = \Phi(M) e^{-iEt/\hbar}$. Dans le cas qui nous occupe, $V(M) = 0$ dans la boîte. À l'extérieur, le potentiel est réputé infini donc $\Phi(M) = 0$.

3. Avec la fonction proposée, $\Delta \Phi = -(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \Phi$ et elle est solution de l'équation aux états stationnaires si

$$\frac{\hbar^2}{2m} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \Phi(M) = E \Phi(M) \quad \text{donc si} \quad E = \frac{\hbar^2}{2m} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \quad .$$

4. Hors de la boîte, Φ est nulle et comme cette fonction est continue, elle s'annule sur les parois de la boîte.

$$\forall (y, z), \Phi(0, y, z) = 0 \quad \text{donc} \quad \sin \theta_1 = 0 \quad .$$

On peut choisir $\theta_1 = 0$.

$$\forall (y, z), \Phi(a, y, z) = 0 \quad \text{donc} \quad \sin(q_1 a) = 0 \quad \text{donc} \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, q_1 a = n\pi \quad q_1 = \frac{n\pi}{a} \quad .$$

De même, on trouve $\theta_2 = 0$, $q_2 = \ell\pi/a$, $\theta_3 = 0$, $q_3 = p\pi/a$. L'énergie s'exprime par

$$E_{n,\ell,p} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} (n^2 + \ell^2 + p^2) \quad (n, \ell, p) \in \mathbb{N}^3.$$

5. Pour déterminer la constante A , on exprime la condition de normalisation

$$\iiint |\Phi(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1 \quad .$$

Cette intégrale s'exprime par

$$|A|^2 \int_0^a \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx \int_0^a \sin^2 \left(\frac{\ell\pi y}{a} \right) dy \int_0^a \sin^2 \left(\frac{p\pi z}{a} \right) dz = \frac{a}{2} \frac{a}{2} \frac{a}{2} \quad .$$

La condition de normalisation donne donc

$$|A| = \left(\frac{a}{2} \right)^{3/2} \quad .$$

L'argument de A est arbitraire; on peut prendre $A = (a/2)^{3/2}$.

6. Le niveau fondamental correspond au triplet $(1, 1, 1)$ (niveau non dégénéré) et le premier niveau excité aux triplets $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, et $(1, 1, 1)$ (niveau triplement dégénéré).

$$E_1 = 3 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \quad E_2 = 6 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \quad .$$

7. On utilise la relation de Planck-Einstein pour lier la longueur d'onde du photon absorbé à la différence d'énergie des deux niveaux.

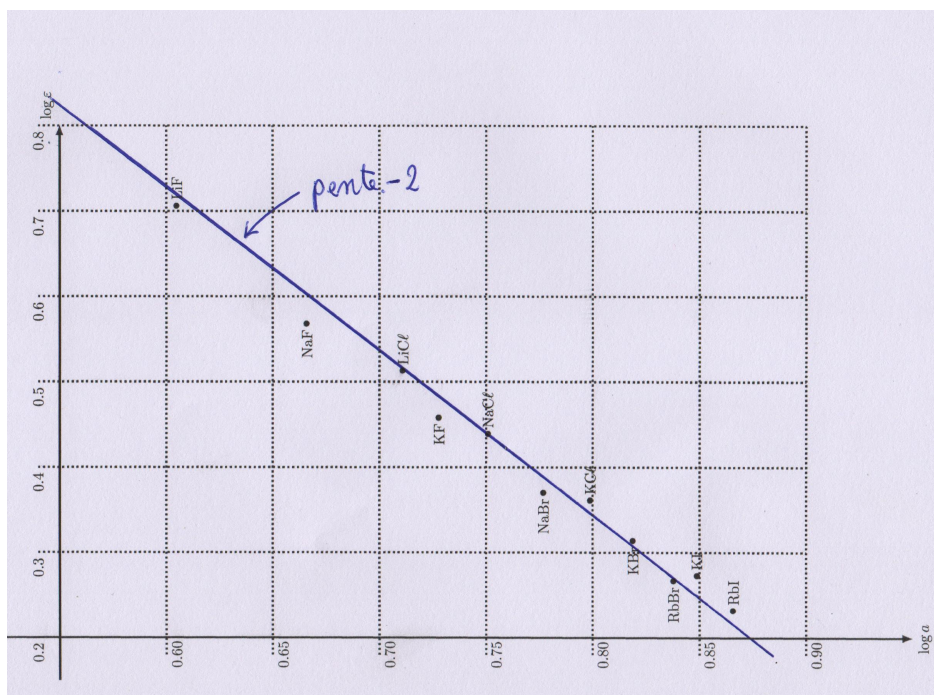
$$\epsilon = E_2 - E_1 = 3 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \quad \epsilon = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \quad \lambda = \frac{4ma^2 c}{3\pi \hbar}$$

8. Dans ce modèle, on a $\epsilon = Ka^n$ avec

$$n = -2 \quad \text{et} \quad K_{\text{modele}} = 3\hbar^2\pi^2/(2m) = 1,21 \cdot 10^{-37} \text{ J.m}^2 = 113 \text{ eV.Å}^2 \quad .$$

Cette valeur de n n'est pas très éloignée de celle obtenue dans la question 1 (-1,87).

Sur la figure représentant $\log \epsilon$ en fonction de $\log a$, portons une droite de pente $n = -2$ et translatons-la de manière à ce qu'elle passe le plus près possible des points expérimentaux (il s'agit d'une « régression linéaire manuelle »). On est aidé par le fait qu'avec l'échelle choisie, une droite de pente -2 traverse les carreaux en pointillés selon leur diagonale. On obtient ainsi l'ordonnée à l'origine $\log K = 0,83 - n \times 0,55 = 1,93$ et donc $K_{\text{exp}} = 85 \text{ eV.Å}^2$. Cette valeur est assez éloignée de celle prédite par le modèle.



9. En remplaçant a par $a_0 = \alpha a$ dans l'expression de K_{modele} , on obtient

$$\epsilon = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2m\alpha^2 a^2} \quad \text{donc} \quad K = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2m\alpha^2} \quad .$$

On cherche α de manière que la valeur de K coïncide avec celle issue de l'expérience

$$\frac{3\hbar^2\pi^2}{2m\alpha^2} = K_{\text{exp}} \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\frac{3\hbar^2\pi^2}{2mK}} = \sqrt{\frac{K_{\text{modele}}}{K_{\text{exp}}}} \quad \alpha = 1,24$$

La taille effective est donc plus grande qu'une maille du réseau cubique : l'électron est emprisonné dans une cage un peu plus grande que ce qu'on avait imaginé.

10. L'inégalité $E_x < V_0$ signifie que l'électron est dans un état lié. Selon les lois de la mécanique classique, il ne peut pas sortir du puits de potentiel.

11. L'équation de Schrödinger aux états stationnaires se met sous la forme

$$\frac{d^2\Phi_x}{dx^2} + \frac{2m(E_x - V(x))}{\hbar^2}\Phi(x) = 0 \quad .$$

— Pour $x \leq 0$, $V(x) = V_0$ et $E_x < V_0$. Posons $\beta = \sqrt{2m(V_0 - E_x)}/\hbar$. La solution générale de l'équation différentielle est

$$\Phi_x(x) = Ae^{\beta x} + Ce^{-\beta x} = Ae^{\beta x} \quad .$$

Comme Φ est bornée, $C = 0$.

— Pour $0 \leq x \leq a$, $V(x) = 0$ donc

$$\Phi_x(x) = B \cos kx + D \sin kx \quad (B, D) \in \mathbb{C}^2 \quad .$$

— Pour $x \geq a$, les solutions bornées sont de la forme

$$\Phi_x(x) = F e^{-\beta x} \quad .$$

12. Ici, la fonction d'onde Φ_x et la densité de probabilité $|\Phi_x|^2$ sont non nulle en dehors de l'intervalle $[0, a]$. L'incertitude Δx sur la position de la particule est donc plus grande que dans le cas du puits infini et, d'après l'inégalité de Heisenberg $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$, l'incertitude sur la quantité de mouvement

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$$

est plus petite. Comme la particule peut aussi bien voyager vers la droite que vers la gauche, $\langle p_x \rangle = 0$ et $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle}$ est aussi la valeur quadratique moyenne de p_x . L'énergie de la particule est liée à cette quantité de mouvement par

$$E_x = \frac{p_x^2}{2m} \quad .$$

Elle est donc plus basse que dans le cas où la particule est dans un puits infiniment profond.

13. Si $E_x \ll V_0$, $\beta \simeq \sqrt{2mV_0}/\hbar$. La distance typique sur laquelle la particule peut franchir la barrière de potentiel par onde évanescente est $1/\beta$ et, comme elle peut le faire des deux côtés, on attribue au puits une largeur effective

$$a_{\text{eff}} = a + \frac{2}{\beta} = a + \frac{\sqrt{2}\hbar}{\sqrt{mV_0}} \quad .$$

14. La relation $a_{\text{eff}} = a_0 = \alpha a$ conduit à

$$U_0 = \frac{2\hbar^2}{m(\alpha - 1)^2 a^2} \quad .$$

15.

$$U_0 = 1,24 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 7,8 \text{ eV} \quad .$$

Il convient de comparer U_0 à $E_1 = 3\hbar^2\pi^2/(2ma_0^2)$.

$$\frac{U_0}{E_1} = \frac{4}{3\pi^2} \frac{1}{(\alpha - 1)^2} = 2,3 \quad .$$

La condition $U_0 \gg E_1$ n'est pas satisfaite ; il faudrait faire de manière plus rigoureuse le calcul du puits fini en exprimant les conditions de bord et en les résolvant graphiquement !

16. L'expression de la fonction d'onde rencontrée au début du problème est toujours valable, mais les conditions de bord vont ici conduire à

$$q_1 = n \frac{\pi}{c} \quad q_2 = \ell \frac{\pi}{c} \quad q_3 = p \frac{\pi}{b}$$

d'où les niveaux d'énergie

$$E_{n,\ell,p} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m} \left(\frac{n^2}{c^2} + \frac{\ell^2}{c^2} + \frac{p^2}{b^2} \right) \quad .$$

Le niveau fondamental est toujours associé au triplet $(1, 1, 1)$, mais les états $(2, 1, 1)$ et $(1, 2, 1)$ possèdent désormais une énergie distincte de celle de l'état $(1, 1, 2)$.

On peut facilement éliminer b et c au profit de a_0 .

$$a_0^2 = c^2 n = \eta c^2 \quad \text{donc} \quad c = \frac{a_0}{\eta^{1/3}} \quad b = a_0 \eta^{2/3} \quad E_{n,\ell,p} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma_0^2} \left(n^2 \eta^{2/3} + \ell^2 \eta^{2/3} + p^2 \eta^{-4/3} \right) \quad .$$

$$E_{1,1,2} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma_0^2} \left(2\eta^{2/3} + 4\eta^{-4/3} \right) = E'_2$$

$$E_{2,1,1} = E_{1,2,1} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma_0^2} \left(5\eta^{2/3} + \eta^{-4/3} \right) = E''_2$$

Les trois premiers états excités correspondent aux nombres quantiques $(1, 1, 2)$, $(2, 1, 1)$ et $(1, 2, 1)$. L'un de ces niveaux est dégénéré et on ne sait pas à ce stade dans quel ordre se rangent E'_2 et E''_2 .

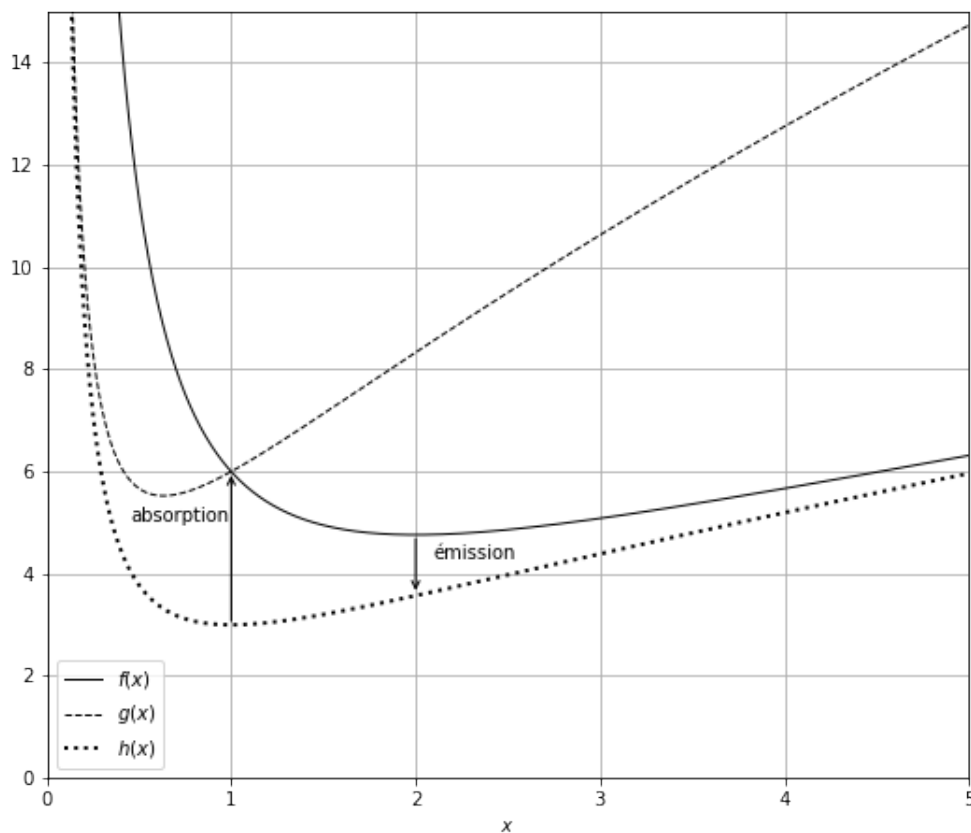
17. Grâce aux courbes fournies, on voit que E'_2 présente un minimum plus bas que E'_1 . On cherche donc le minimum de la fonction f par un calcul de dérivée.

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{-1/3} - \frac{16}{3}x^{-7/3} = \frac{4x^{-1/3}}{3} (1 - 4x^{-2}) \quad .$$

Cette dérivée s'annule pour $x = 2$ et $f(2) = 2^{5/3} + 2^{2/3} = 4,76$ (conforme au graphe fourni). On a donc $\eta^0 = 2$ et les nombres quantiques réalisant le minimum d'énergie sont $(1, 1, 2)$. Le centre F adopte une configuration où $\eta = \eta^0 = 2$, c'est à dire $b = 2c$. Il présente donc une forme étirée.

18. Pour les nombres $(1, 1, 1)$, on obtient le niveau fondamental

$$E'_1 = E_{1,1,1} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma_0^2} (2\eta^{2/3} + \eta^{-4/3}) \quad h(\eta) = 2\eta^{2/3} + \eta^{-4/3} \quad .$$



Pour $\eta = \eta_0 = 2$, on obtient l'énergie du niveau fondamental dans le centre F aplati

$$E'_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma_0^2} (2 \times 2^{2/3} + 2^{-4/3}) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma_0^2} \times 3,60 \quad .$$

19. La raie d'émission se trouve dans l'infrarouge mais, à cause du déplacement de Stokes, la raie d'absorption se trouve dans le visible. Lorsqu'on éclaire le cristal en lumière blanche, il absorbe donc certaines longueurs d'onde visibles et le spectre de la lumière réfléchie ou transmise n'est plus celui de la lumière blanche. Cette lumière apparaît donc colorée.

20. Sur le graphe représentant la loi de Mollwo et Ivey, on voit que NaCl , KCl et KI absorbent respectivement des photons d'énergies $\epsilon_{\text{NaCl}} = 2,75 \text{ eV}$, $\epsilon_{\text{KCl}} = 2,34 \text{ eV}$ et $\epsilon_{\text{KI}} = 1,92 \text{ eV}$. Ce sont des absorptions dans le violet, dans le vert et dans le rouge. La couleur perçue est la couleur complémentaire.

	NaCl	KCl	KI
ϵ	2,75 eV	2,34 eV	1,92 eV
couleur absorbée	violet	vert	rouge
couleur vue	jaune	rouge (mauve)	vert

21. Avant l'absorption, le centre F n'est pas déformé : on voit en effet sur les graphes que le niveau fondamental présente une énergie minimale lorsque $\eta = 1$ (d'énergie proportionnelle à $h(1)$). Quand il absorbe un photon, il passe dans l'état excité E_2 d'énergie proportionnelle à $f(2) = g(2)$. Puis la déformation de Jahn-Teller intervient jusqu'à $\eta = \eta^0 = 2$, vers un état d'énergie E'_2 proportionnelle à $f(2)$. La désexcitation le fait vers le niveau fondamental pour $\eta = \eta_0$, c'est à dire vers E'_1 proportionnelle à $h(1)$.

22. On voit sur le graphe que l'énergie entrant en jeu dans l'absorption est supérieure à celle entrant en jeu dans l'émission et cela explique le déplacement de Stokes. Plus précisément,

$$E_{\text{abs}} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma_0^2} (f(1) - h(1)) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma_0^2} E_{\text{emi}} \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma_0^2} (f(2) - h(2))$$

Donc

$$\frac{E_{\text{abs}}}{E_{\text{emi}}} = \frac{f(1) - h(1)}{f(2) - h(2)} = \frac{2}{4,76 - 3,60} = 2,58 \quad .$$

Sur la figure de l'énoncé, on lit $E_{\text{abs}}/E_{\text{emi}} = 2,06/0,92 = 2,24$. Ces deux rapports sont assez proches et le mécanisme décrit donc assez bien le déplacement de Stokes.

Sondages ionosphériques

Mines-Ponts

26. L'équation d'état des gaz parfaits s'écrit

$$PV = \frac{N}{N_a} RT \quad \text{donc} \quad n^* = \frac{N}{V} = \frac{P}{k_B T} = 3.10^{25} \text{ m}^{-3} \quad .$$

27. La relation de la statique des fluides s'écrit $dP/dz = -\rho g$ avec $\rho = MP/(RT_0) = \frac{m_0 g}{k_B T}$, ce qui donne l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dz} + \frac{m_0 g}{k_B T_0} P = 0$$

qu'on résout en

$$P = P_0 e^{-z/H} \quad \text{avec} \quad H = \frac{k_B T_0}{m_0 g} \quad .$$

La hauteur caractéristique H est de l'ordre de 8 km.

28. Environ une particule sur 1000 est ionisée donc

$$n_{\text{max}} = \frac{1}{1000} \frac{P}{k_B T} = \frac{1}{1000} \times 10^{-10} \frac{P_0}{k_B T} = 10^{-13} n^* = 3.10^{12} \text{ m}^{-3} \quad .$$

29. Le champ électrique envisagé ici est uniforme donc $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$. D'après l'équation de Maxwell-Faraday, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ et \vec{B} est statique.

30.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \quad i\omega m \vec{v} = -e\vec{E} \quad \vec{v} = \frac{ie\vec{E}}{m\omega} \quad \vec{j} = -n_0 e \vec{v} = -\frac{n_0 ie^2}{m\omega} \vec{E} \quad \boxed{\gamma = -\frac{n_0 e^2}{m\omega}}$$

31. L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$. Ici, $\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ donc

$$-\frac{n_0 e^2}{m\omega} \vec{E} + i\omega \epsilon_0 \vec{E} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \omega = \omega_p \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m\epsilon_0}}} \quad .$$

32. Comme $n_0 \leq 10^{12} \text{ m}^{-3}$, $\omega_p \leq 56.10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ et $f_p \leq 10 \text{ MHz}$.

33. — Le terme $-e\vec{E}$ représente la force électrique subie par l'électron.

— Le terme $-m_e \omega_0^2 / (i\omega) \vec{v}$ représente une force de rappel élastique. En effet, diviser par $i\omega$ revient à intégrer et ce terme se réécrit $-m_e \omega_0^2 \vec{OM}$, c'est une force de rappel de raideur $k = m\omega_0^2$.

- Le terme $-m\vec{v}/\tau$ est une force de frottement visqueux modélisant de manière heuristique les collisions. Si $\tau \rightarrow \infty$, on la fait disparaître et il n'y a plus d'effet dissipatif.
- Le champ magnétique n'intervient pas car le terme en $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est négligeable devant \vec{E} pour $v \ll c$.

34. La densité volumique de charge est supposée nulle donc l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit $\text{div } \vec{E} = \vec{0}$, c'est dire $-i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$. En posant $\vec{k} = k\vec{u}$, on en déduit $\vec{u} \cdot \vec{E} = 0$ puis $\vec{u} \cdot \text{Re}(\vec{E}) = 0$. Le champ électrique est transverse.

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. En prenant membre à membre le rotationnel de cette équation, on obtient

$$\overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} \quad .$$

D'après l'équation de Maxwell-Ampère, $\text{rot } \vec{B} = \mu_0(\gamma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$ d'où

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad .$$

Avec le forme exponentielle considérée ici, $\Delta = -k^2$ et on en déduit

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \gamma i \omega \quad .$$

Il s'agit maintenant d'éliminer γ . Son expression n'est plus celle de la question 30 puisqu'on a ajouté de nouvelles forces. L'équation (3) de l'énoncé s'écrit

$$\left(im\omega + m \frac{\omega_0^2}{i\omega} \right) \vec{v} = -e\vec{E}$$

et donne

$$\vec{v} = -\frac{e\vec{E}}{im\omega + m \frac{\omega_0^2}{i\omega}} \quad \text{puis} \quad \vec{j} = -n_0 e \vec{v} = \gamma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{in_0 e^2 \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\mu_0 n_0 e^2 \omega^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)}$$

35.

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}} \quad N = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

$$N = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \simeq \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)} \quad \boxed{N \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)}$$

Comme N dépend de ω , le milieu est dispersif.

36. Si $\omega_0 = 0$, la relation de dispersion devient $k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2)/c^2$. Le milieu est transparent si $k^2 > 0$, c'est à dire si $\omega > \omega_p$. Dans ce cas,

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad .$$

Cette vitesse de phase dépend de ω : le milieu est dispersif.

37. Pour les champs incident et réfléchi, on peut appliquer la relation de structure de l'OPPH dans le vide et on obtient

$$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - \omega z/c)} \vec{e}_y \quad \vec{B}_r = -\rho \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + \omega z/c)} \vec{e}_y \quad .$$

Pour l'onde transmise, l'équation de Maxwell-Faraday donne $-ik\vec{e}_z \wedge \vec{E}_t = -i\omega \vec{B}_t$ d'où

$$\vec{B}_t = \frac{k\beta E_0}{\omega} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \quad .$$

La continuité du champ électrique et du champ magnétique donnent respectivement

$$E_0 + \underline{\rho}E_0 = \underline{\beta}E_0 \quad \frac{E_0}{c} - \underline{\rho}\frac{E_0}{c} + \frac{k\underline{\beta}E_0}{\omega}$$

c'est à dire

$$1 + \underline{\rho} = \underline{\beta} \quad 1 - \underline{\rho} = \frac{\beta ck}{\omega} .$$

On en déduit

$$\underline{\rho} = \frac{1 - ck/\omega}{\omega + ck/\omega}$$

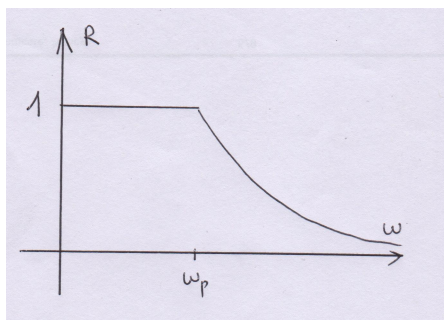
— Si $\omega > \omega_p$, $ck/\omega = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}$ et

$$\underline{\rho} = \frac{1 - \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}{1 + \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} .$$

— Si $\omega < \omega_p$, $ck = -i\sqrt{\omega_p^2/\omega^2 - 1}$ et

$$\underline{\rho} = \frac{1 + i\sqrt{\omega_p^2/\omega^2 - 1}}{1 - i\sqrt{\omega_p^2/\omega^2 - 1}}$$

38. R est le coefficient de réflexion pour l'intensité, c'est à dire pour le vecteur de Poynting moyen, on encore pour la puissance. Pour $\omega < \omega_p$, $|\rho| = 1$ donc $R = 1$. Pour $\omega > \omega_p$, R décroît à partir de 1 et tend vers 0 si $\omega \rightarrow \infty$.



On observe dans tous les cas un écho puisque R est non nul, mais l'écho est bien plus fort si $\omega < \omega_p$ puisque toute la puissance est dans ce cas réfléchi.

39. Il faut que la durée de l'impulsion soit petite par rapport à celle du trajet aller-retour jusqu'à la couche réfléchissante : $\Delta t \ll 2h/c$.

Lame à retard pilotable

corrigé

B.1 La vitesse de phase est donnée par $v = c/n$. Comme $n_x > n_y$, $v_x < v_y$, \vec{u}_x désigne l'axe lent et \vec{u}_y l'axe rapide.

B.2.a) — Pour $\varphi = 0$, $\vec{E} = E_{0x}(\vec{u}_x + \alpha\vec{u}_y) \cos(\omega t + \chi)$. Le champ reste colinéaire à un vecteur constant : il s'agit d'une PR dans la direction du vecteur $\vec{u}_x + \alpha\vec{u}_y$.

— Pour $\varphi = \pi/2$, $\vec{E} = E_{0x}(\cos(\omega t + \chi)\vec{u}_x - \alpha \sin(\omega t + \chi)\vec{u}_y)$. Il s'agit d'un PCD.

— Pour $\varphi = \pi$, $\vec{E} = E_{0x}(\vec{u}_x - \alpha\vec{u}_y) \cos(\omega t + \chi)$, il s'agit d'une PR dans la direction du vecteur $\vec{u}_x - \alpha\vec{u}_y$.

— Pour $\varphi = 3\pi/2$, $\vec{E} = E_{0x}(\cos(\omega t + \chi)\vec{u}_x + \alpha \sin(\omega t + \chi)\vec{u}_y)$. Il s'agit d'un PCG.

B.2.b) Les polarisations elliptiques ci-dessus deviennent circulaires si $\alpha = 1$.

B.2.c) Ces représentations figurent dans le cours sur les ondes électromagnétiques. Comme $\alpha < 1$, les PR présentent une composant plus longue selon la direction \vec{u}_x que selon la direction \vec{u}_y ; les PE ont leur grand axe selon \vec{u}_x et leur petit axe selon \vec{u}_y .

B.3 À partir du champ évalué en $z = 0^+$ fourni par l'énoncé, on obtient le champ en $z > 0$ en modifiant la phase de chaque composante par ajout du terme de propagation $-kz$: $e^{j\omega t}$ devient $e^{j(\omega t - kz)}$. Mais attention : comme le matériau est biréfringent, il faut prendre pour k les valeurs distinctes $k_x = n_x\omega/c$ et $k_y = n_y\omega/c$ selon que l'on considère la composante E_x ou la composante E_y .

$$\vec{E}(z, t) = \begin{cases} E_{0x} e^{j(\omega t + \chi - n_x \frac{\omega}{c} z)} \\ \alpha E_{0y} e^{j(\omega t + \chi + \varphi - n_y \frac{\omega}{c} z)} \end{cases}$$

On identifie

$$\boxed{\chi' = \chi - n_x \frac{\omega z}{c}} \quad \varphi' + \chi' = \varphi + \chi - n_y \frac{\omega z}{c} \quad \varphi' = \varphi + \chi - \chi' - n_y \frac{\omega z}{c} \quad \boxed{\varphi' = \varphi + (n_x - n_y) \frac{\omega z}{c}} .$$

Le déphasage entre les deux composantes du champ est donc modifié par le passage au travers de la lame à retard. La composante colinéaire à \vec{u}_x , qui se propage moins vite, prend du retard sur la composante colinéaire à \vec{u}_y . Cette modification du déphasage entraîne une modification de l'état de polarisation. L'énoncé demande de comparer l'état de polarisation d'entrée et celui de sortie, mais nous l'allons pas le faire ici en traitant tous les cas possibles ! Cette discussion est renvoyée à des questions ultérieures.

B.4 Il suffit d'évaluer φ en $z = e$ et de remarquer que $\omega/c = 2\pi/\lambda$ pour obtenir

$$\varphi' = \varphi + \frac{2\pi\delta}{\lambda} \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta = (n_x - n_y)e} .$$

Comme $n_x > n_y$, $\delta > 0$: la composante selon \vec{u}_x parcourt fictivement plus de chemin, elle prend du retard.

B.5 Pour $\varphi = 0$ et $\alpha = 1$, l'onde en $z = 0$ est polarisée rectiligne avec un champ électrique dans direction de $\vec{u}_x + \vec{u}_y$, c'est à dire selon la première bissectrice des axes.

- Pour obtenir une PCD, on choisit $\varphi' = \pi/2$ donc $\delta_C = \lambda/4$: il s'agit d'une lame quart d'onde ;
- pour obtenir une PR, on choisit $\varphi' = \pi$, donc $\delta_R = \lambda/2$: il s'agit d'une lame demi-onde. L'onde transmise est alors polarisée dans la direction de $\vec{u}_x - \vec{u}_y$, c'est à dire selon la seconde bissectrice des axes ; elle est symétrique de la PR incidente par rapport aux axes (Ox, Oy) .

C.1 Nous avons traité les questions C.1 et C.2 en travaux pratiques et je me limite ici à des réponses sommaires. La réponse est constituée une application de la question B.5.

Devant la source lumineuse, on place un diaphragme puis une lentille de sorte que le diaphragme se trouve dans son plan focal objet. On obtient ainsi un faisceau collimaté. Sur ce faisceau, on place d'abord un polariseur parfait ce qui fournit une onde PR. Ensuite, on place une lame quart d'onde de manière à ce que la PR précédente lui parvienne avec un champ électrique formant un angle de 45° avec ses lignes neutres (il est dans la direction de $\vec{u}_x + \vec{u}_y$). Après cette lame, on obtient une PCD.

Pour obtenir une PCG, il suffit que la PR incidente soit polarisée dans la direction de $\vec{u}_x - \vec{u}_y$, ce qui change le signe du déphasage (on remplace $\pi/2$ par $-\pi/2 = 3\pi/2[2\pi]$).

C.2 On fait passer la PC dans une lame quart-onde. On obtient alors une PR orientée à 45° des lignes neutres de cette lame, dans la première ou la seconde bissectrice des axes selon que la PC est droite au gauche (selon $\vec{u}_1 = \vec{u}_x + \vec{u}_y$ ou selon $\vec{u}_2 = \vec{u}_x - \vec{u}_y$). Ensuite, un polarisateur placé dans l'une de ces deux directions permet de laisser la lumière de champ colinéaire à \vec{u}_1 en éliminant celle de champ colinéaire à \vec{u}_2 .

Pour retrouver une PC, on place une nouvelle lame quart-onde qui redonnera soit une PCD soit une PCG selon le principe décrit dans la question précédente.

D.1.a) $\delta_c = e_c \Delta_n = 69,732 \mu\text{m}$.

D.1.b) Supposer que δ_c est indépendant de λ revient à affirmer que la vitesse de phase est indépendante de λ , c'est à dire à négliger la dispersion.

D.2 Pour $\lambda \in [1,535; 1,565] \mu\text{m}$, $\delta_R = \lambda/2 \in [0,7675; 0,7825] \mu\text{m}$. Les tensions U permettant d'obtenir cet intervalle de valeurs se situent autour de $2,6 \text{ mV}$, dans un intervalle de largeur inférieure à $0,1 \text{ V}$. À partir de la pente de la courbe, on calcule que cette intervalle s'étend sur $0,025 \text{ V}$. Il est très étroit et il s'annonce très délicat de contrôler la tension avec une précision suffisante pour bien maîtriser les différences de marches.

D.3.a) Un déphasage de 2π n'a aucune incidence sur la polarisation. La lame se comporte comme demi-onde, et transforme une PR en une PR distincte, si $\varphi' - \varphi = \pi + 2p\pi$, c'est à dire si

$$\frac{2\pi\delta}{\lambda} = (2p+1)\pi \quad \Leftrightarrow \quad \delta = (2p+1) \frac{\lambda}{2} = (2p+1)\delta_R .$$

D.3.b) Pour $0 \leq U \leq 6 \text{ V}$, $0,08 \mu\text{m} \leq \delta_{\text{CL}} \leq 1,58 \mu\text{m}$ et

$$69,812 \mu\text{m} \leq \delta_c + \delta_{\text{CL}} \leq 71,312 \mu\text{m} \quad .$$

La longueur d'onde varie de 1535 à 1565 nanomètres.

— Pour $p = 44$, $2p + 1 = 88$ et $68,3 \mu\text{m} \leq (2p + 1) \frac{\lambda}{2} \leq 69,6 \mu\text{m}$.

— Pour $p = 45$, $2p + 1 = 91$ et $69,84 \mu\text{m} \leq (2p + 1) \frac{\lambda}{2} \leq 71,21 \mu\text{m}$.

— Pour $p = 46$, $2p + 1 = 93$ et $71,4 \mu\text{m} \leq (2p + 1) \frac{\lambda}{2} \leq 72,8 \mu\text{m}$.

C'est donc la valeur $p = 45$ qui permet, en faisant varier δ_{CL} , d'englober toutes les valeurs de $\delta_c + \delta_{\text{CL}}$ qu'on souhaite réaliser.

D.3.c Pour $p = 45$, $2p + 1 = 91$.

$$91 \frac{\lambda_1}{2} \leq \delta_{\text{CL}} + \delta_c \leq 91 \frac{\lambda_2}{2} \Leftrightarrow 91 \frac{\lambda_1}{2} - \delta_c \leq \delta_{\text{CL}} \leq 91 \frac{\lambda_2}{2} - \delta_c \Leftrightarrow 0,110 \leq \delta_c \leq 1,475$$

En utilisant le graphe de l'énoncé et les tableau de valeurs placé à sa droite, on en déduit que U doit varier entre 1,35 V et 5,30 V. Les valeurs du tableau n'ont pas été choisies au hasard : ce sont précisément celles dont on a besoin pour répondre à cette question.

En choisissant un ordre $p + 1/2$ élevée plutôt que l'ordre $1/2$, la plage de différences de marches associées à l'intervalle de longueurs d'onde devient beaucoup plus large. La lame de calcite assure la plus grande partie de cette différence de marche avec un terme fixé, et la lame de cristaux liquides permet un ajustement par l'intermédiaire de la tension.

D.3.d Le même calcul qu'à la question précédente, en remplaçant λ_1 ou λ_2 par λ_0 et l'inégalité par une égalité, donne

$$\delta_{\text{CL}} = 91 \frac{\lambda_0}{2} - \delta_c = 0,793 \mu\text{m} \quad .$$

En utilisant à nouveau la courbe ou le tableau de valeurs, on en déduit $U = 2,68 \text{ V}$.