

DEVOIR N° 21 - piste rouge

Le 27 mars 2025

Centres colorés dans les cristaux ioniques

D'après J.L. Basdevant, J. Dalibard, *Mécanique Quantique – Problèmes*

Données numériques

masse de l'électron : $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg, constante de Planck réduite : $\hbar = 1,05 \times 10^{-34}$ J.s, $1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19}$ J, $1\text{Å} = 10^{-10}$ m.

Considérons le solide diatomique NaCl. Il s'agit d'un solide ionique en ce sens que chaque sodium (atome très électropositif) perd, au moment où se constitue le solide à partir des atomes, un électron au profit d'un chlore. Le solide cristallin est alors, en fait, un empilement d'ions Na^+ et Cl^- . L'empilement est dit compact et le cristal est cubique à faces centrées pour chacun des deux ions (Cl^- par exemple), l'autre ion occupant le centre des arêtes et le centre du cube (voir figure 1). Schématiquement le cristal, vu parallèlement à une face du cube, est représenté sur la figure 1. Cette structure est très fréquente dans la nature et concerne notamment tous les halogénures alcalins.

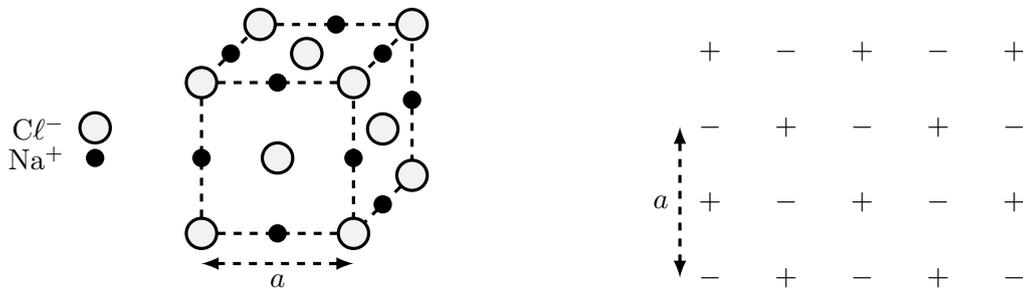


FIGURE 1 – Gauche : structure cubique faces centrées (exemple de NaCl). Droite : vue de face du même cristal.

Ces cristaux, lorsqu'ils sont suffisamment purs, sont *transparents*. Mais si on les irradie avec des photons d'énergie suffisante (par exemple des rayons X ou γ), *ils se colorent*. La raison de cette coloration est la suivante : un photon est capable d'éjecter un anion de son site, laissant à la place un site inoccupé appelée *lacune*. Cette lacune anionique, entourée d'ions positifs est très électro-négative : elle tend à *piéger un électron* (ce qui restitue localement la neutralité du cristal). Un tel électron est susceptible d'occuper divers états entre lesquels il peut transiter. Notamment il peut être excité à partir de son fondamental, donc *absorber la lumière*, d'où la coloration du cristal. L'ensemble {lacune + électron} s'appelle *centre F* (*Farbenzentrum* en allemand). Le schéma du centre F est donné sur la figure 2.

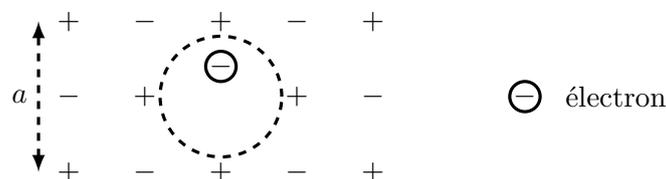


FIGURE 2 – Schéma d'un centre F (le cercle en tirets représente schématiquement la lacune dans laquelle évolue l'électron.)

I Loi de Mollwo-Ivey et interprétation quantique

Désignons par a le paramètre de maille, c'est-à-dire l'arête du cube élémentaire dans la structure NaCl. La distance de deux ions voisins + et - est $a/2$.

Des mesures d'énergie ε des raies d'absorption lumineuse sur divers halogénures alcalins, dues à Mollwo et Ivey, ont montré que cette énergie varie de façon simple en fonction du paramètre de maille. Les résultats apparaissent sur la figure 3.

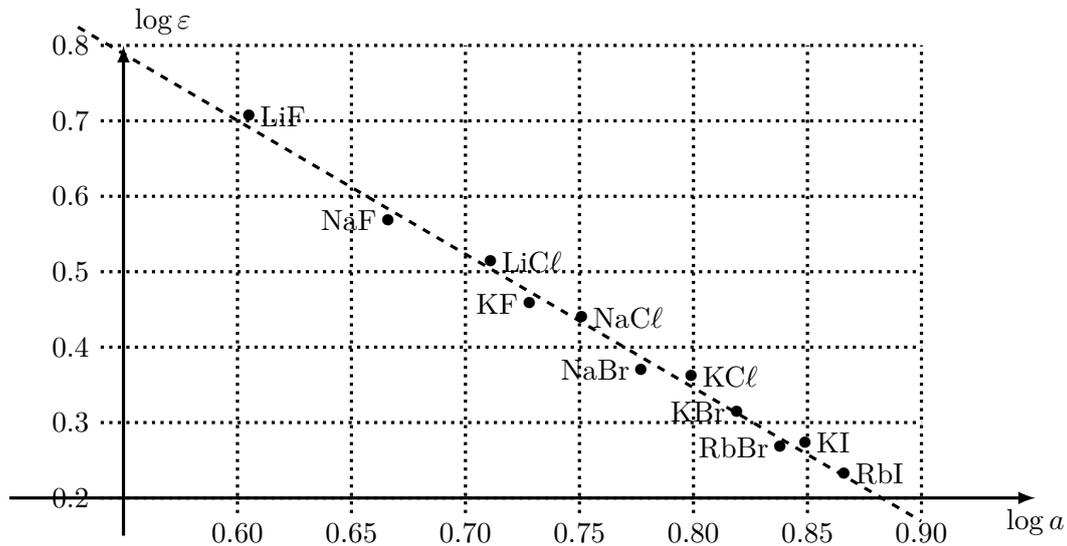


FIGURE 3 – Représentation du logarithme décimal de l'énergie (en eV) en fonction du logarithme décimal du paramètre de maille (en Å, où $1\text{Å} = 10^{-10}\text{m}$).

1. La représentation graphique de ces résultats suggère un lien entre ε et a de la forme : $\varepsilon = Ka^n$ (c'est la loi de Mollwo-Ivey). En exploitant la figure 3, trouver les valeurs numériques de n et de K (en unités telles que ε soit en eV et a en Å).

Observer que l'énergie de transition ε ne dépend de la nature du cristal que par l'intermédiaire de a indique que la structure du centre F doit être la même pour tous ces cristaux. Le modèle le plus simple du centre F est alors le suivant : les Z ions positifs immédiatement voisins (et à la distance $a/2$) du centre F forment une coquille dans laquelle est piégé l'électron du centre F. Cette coquille peut être assimilée à une *boîte cubique* où règne un potentiel constant, pris par exemple égal à zéro. Le potentiel sera, en première approximation, considéré comme infini à l'extérieur de la boîte (puits infiniment profond).

Dans un premier temps, il est raisonnable de prendre comme arête de la boîte cubique l'arête de la maille cristalline. En prenant l'origine des coordonnées sur un sommet du cube, le potentiel est donc :

$$\begin{cases} V = 0 & \text{pour } 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a \\ V = +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Rappeler l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde $\Psi(M, t)$ puis établir l'équation portant sur les états stationnaires en faisant intervenir l'énergie E d'un tel état. On notera $\Phi(M) = \Phi(x, y, z)$ la partie spatiale.

3. Montrer qu'une fonction de la forme

$$\Phi(M) = A \sin(q_1x + \theta_1) \sin(q_2y + \theta_2) \sin(q_3z + \theta_3)$$

décrit un état stationnaire d'un électron piégé dans un centre F et exprimer son énergie en fonction de q_1, q_2, q_3 et de constantes universelles.

4. Expliciter les conditions de bord et déterminer les valeurs possibles pour q_1, q_2 et q_3 . En déduire l'expression de l'énergie $E_{n,\ell,p}$ en fonction de trois entiers n, ℓ et p .

5. Déterminer la constante A à un facteur de phase près.

6. Donner les énergies E_1 et E_2 du niveau fondamental et du premier niveau excité. Préciser les degrés de dégénérescence correspondant, c'est à dire le nombre d'états distincts possédant chacune de ces deux énergies.

7. En admettant que l'absorption lumineuse est due à la transition $E_1 \rightarrow E_2$ des électrons des centres F, exprimer l'énergie ε et la longueur d'onde λ du pic d'absorption en fonction du paramètre de maille a .

8. On remarque que ce modèle conduit à une expression similaire à celle donnée par la loi de Mollwo-Ivey. Comparer les valeurs théoriques et expérimentales du coefficient n . En fixant n à sa valeur théorique, exploiter la figure 6 pour déterminer la valeur de K la plus en accord avec les résultats expérimentaux et comparer cette valeur à celle prédite par le modèle. Le travail graphique est à mener sur la figure (6) située à la fin de l'énoncé à rendre avec la copie.

II Largeur effective de boîte

Le choix de la taille du cube comporte une certaine part d'arbitraire. On introduit donc une *taille effective* $a_0 = \alpha a$, et on choisit α de telle sorte que la formule théorique trouvée (i.e. en prenant pour vraie la valeur de n obtenue théoriquement) à la question 7. rende compte le mieux possible des résultats expérimentaux.

9. Évaluer numériquement α . Faire un bref commentaire physique sur la nouvelle valeur a_0 de la taille du puits.

Pour interpréter l'écart entre a et a_0 , on peut remarquer que le puits de potentiel qui modélise le centre F n'est en réalité pas infini. On affine donc la modélisation en prenant

$$\begin{cases} V(M) = 0 & \text{pour } 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a \\ V(M) = V_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À cause de la symétrie cubique, la fonction d'onde $\Phi(M)$ s'écrit comme le produit de trois fonctions analogues dépendant respectivement de x , y et z : $\Phi(M) = \Phi_x(x)\Phi_y(y)\Phi_z(z)$. Chacune des fonctions Φ_x , Φ_y et Φ_z vérifie une équation de Schrödinger stationnaire à une dimension, avec des énergies respectives E_x , E_y et E_z , et l'énergie de la particule dans la boîte tridimensionnelle est $E = E_x + E_y + E_z$. Afin de ne pas reproduire inutilement les mêmes calculs, on s'intéresse seulement à $\Phi_x(x)$, associée au potentiel unidimensionnel

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{pour } 0 < x < a \\ V(x) = V_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

10. On s'intéresse à des états d'énergie $E_x < V_0$. Que signifie physiquement cette égalité ? On pourra s'appuyer sur les lois de la mécanique classique.

11. Résoudre l'équation de Schrödinger aux états stationnaires et exprimer $\Phi_x(x)$ en faisant intervenir quatre constantes d'intégration qu'il n'est pas demandé de déterminer.

12. Expliquer pourquoi la particule est « moins confinée » que premier modèle. En argumentant à partir de l'inégalité de Heisenberg, montrer que cela conduit à un abaissement du niveau d'énergie le plus bas.

13. Sous certaines hypothèses (approximation du « puits profonds »), on montre que l'énergie de la particule se met sous la forme approximative

$$E_x \simeq \frac{\hbar^2}{2ma_{\text{eff}}^2} \quad \text{avec} \quad a_{\text{eff}} = a + \frac{\sqrt{2}\hbar}{\sqrt{mU_0}} .$$

Interpréter l'expression de a_{eff} à partir des résultats de la question 11., dans l'hypothèse $U_0 \gg E_x$.

14. On revient au problème réel, tridimensionnel, et on postule que a_{eff} s'identifie à la taille effective a_0 introduite dans la question 9.. En déduire l'expression de U_0 en fonction de \hbar , m , α et a .

15. Calculer numériquement U_0 (en joules puis en eV) pour le chlorure de sodium ($a = 5,74 \text{ \AA}$). La condition $U_0 \gg E_1$ est-elle satisfaite ?

Dans la suite, on revient au modèle de puits infini de largeur a_0 .

III Effet Jahn-Teller

Si un état quantique d'une molécule non linéaire se trouve être dégénéré, on peut montrer qu'il existe une distorsion de la molécule qui, en conduisant à une symétrie plus basse pour celle-ci, lève la dégénérescence et stabilise la molécule. Cette distorsion est en général appelée *effet Jahn-Teller*.

L'ensemble du centre F et des ions voisins peut être considéré comme une pseudo molécule susceptible de subir une distorsion de Jahn-Teller. Nous allons le vérifier dans le cadre d'un modèle simple de centre F.

On continue comme précédemment à assimiler le centre F à un puits cubique infiniment profond d'arête a_0 , de potentiel nul. On prendra ici encore les axes x , y et z le long des arêtes du cube.

On déforme alors la lacune en lui donnant la forme d'un parallélépipède à base carrée (arêtes de longueur c le long de (Ox) et (Oy) , hauteur b le long de (Oz)) représenté figure 4. Compte-tenu de la rigidité globale du cristal, il est raisonnable de considérer que ce changement de forme de la lacune se fait à volume constant ($a_0^3 = c^2b$). On caractérise la déformation par le paramètre $\eta = b/c$.

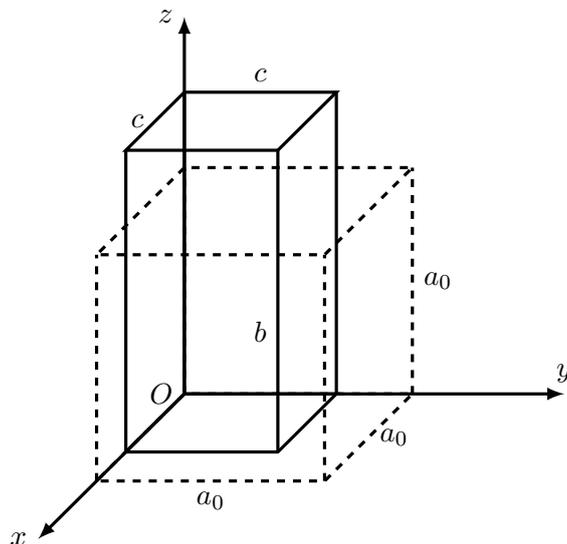


FIGURE 4 – En tirets : puits cubique non déformé (côté a_0). En trait plein : puits déformé : parallélépipède à base carrée dans le plan (Oxy) (côté c) et de hauteur b .

16. Montrer comment la déformation lève la dégénérescence du niveau E_2 . On calculera pour cela l'influence de la déformation η sur E_2 . On montrera en particulier que les trois premiers niveaux excités (précédemment déterminés) d'énergie E_2 possèdent maintenant des énergies d'expressions :

$$E'_2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma_0^2} (2\eta^{2/3} + 4\eta^{-4/3}) \quad \text{et} \quad E''_2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma_0^2} (5\eta^{2/3} + \eta^{-4/3}) \quad .$$

Attribuer à ces deux énergies les nombres $\{n, m, p\}$ correspondants.

17. La figure 7 (située à la fin de l'énoncé) représente les graphes des fonctions $f : x \mapsto 2x^{2/3} + 4x^{-4/3}$ et $g : x \mapsto 5x^{2/3} + x^{-4/3}$, ce qui revient à tracer E'_2 et E''_2 en unités de $\hbar^2 \pi^2 / (2ma_0^2)$. Déterminer la valeur exacte de η^0 de η pour lequel l'énergie est minimale, préciser les nombres quantiques (n, ℓ, p) associés et donner l'énergie minimale E'^0_2 . Le centre F est-il allongé ou aplati ?

18. Exprimer l'énergie du niveau fondamental E'_1 en fonction de η sous la forme

$$E'_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma_0^2} h(\eta)$$

puis compléter la figure 7 (à rendre avec la copie) en y ajoutant le graphe montrant les variations de E'_1 . Préciser l'expression de E'_1 pour $\eta = \eta^0$.

IV Déplacement de Stokes

Nous pouvons maintenant donner une description simple de l'ensemble *absorption-émission* d'un centre F . Revenons pour cela à l'expérience. Nous avons décrit sommairement en introduction l'*absorption* de la lumière par les centres F . L'expérience montre qu'après un temps de vie de l'ordre de 10^{-6} s, l'état excité se désexcite : il émet un photon dit de *luminescence*. C'est l'*émission*.

L'étude expérimentale des raies d'émission montre que celles-ci sont systématiquement déplacées vers les longueurs d'ondes plus grandes – ou les énergies plus petites – par rapport aux raies d'absorption. Ce déplacement, dont la figure 5 montre un exemple, s'appelle *déplacement de Stokes*.

19. Nous admettrons dans un premier temps que ce déplacement déporte, dans la plupart des cas, la raie d'émission dans l'*infrarouge* (non visible).

S'il en est bien ainsi, par quel mécanisme *simple* les centres F colorent-ils un cristal regardé en lumière ordinaire ?

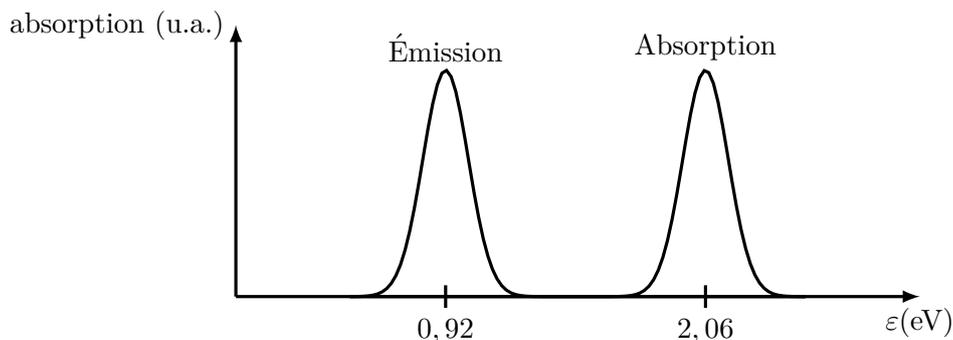


FIGURE 5 – Spectres d’absorption et d’émission du centre F dans KBr à basse température (20K).

20. On rappelle que les couleurs du spectre de la lumière blanche sont, dans l’ordre des énergies croissantes ($E = hc/\lambda$) : rouge (de 1,65eV à 2,0eV), orangé (de 2,0eV à 2,1eV), jaune (de 2,1eV à 2,3eV), vert (de 2,3eV à 2,55eV), bleu (de 2,55eV à 2,65eV), violet (de 2,65eV à 3,1eV). On appelle couleurs complémentaires des couleurs qui, associées, restituent la lumière blanche. Les couples principaux de couleurs complémentaires sont jaune-violet, rouge-vert et bleu-orange. Ainsi une absorption dans le bleu confère une couleur orange.

On dispose d’échantillons de trois cristaux différents : KI, KCl et NaCl. Ces cristaux ont été soumis à une irradiation de rayons X. Incolores à l’état initial, ils se sont colorés par création de centre F. Les couleurs observées sont le jaune, le vert et le mauve. Attribuer chaque couleur à chaque cristal.

Nous tentons de donner ci-dessous une description théorique simple du déplacement de Stokes.

On admettra que les temps d’excitation et de désexcitation électronique sont négligeables par rapport aux temps de déformation locale du cristal, eux-mêmes négligeables par rapport aux temps de vie des états excités (soit $\sim 10^{-6}$ s).

21. Donner dans ces conditions une description très simple de l’ensemble *absorption-émission* d’un centre F. On utilisera pour cela les résultats de la partie III.

22. Plus quantitativement, on montrera que les résultats des questions **16.**, **17.** et **18.** rendent assez bien compte du résultat expérimental de la figure 5.

Sondages ionosphériques

Mines-Ponts PC 24

L'ionosphère est la couche supérieure de l'atmosphère terrestre ; elle s'étend au-dessus de 50 à 80 km d'altitude ; les électrons et ions libres y jouent un rôle important. À l'altitude où la densité électronique est la plus élevée, environ une particule d'air sur 1 000 est ionisée par les rayons UV, X et gamma solaires. Cette ionisation permet d'analyser les fluctuations des propriétés de la haute atmosphère par la méthode des sondages ionosphériques : une onde électromagnétique de haute fréquence, envoyée depuis le sol en direction de l'atmosphère, se réfléchit sur une zone ionisée à une altitude variable.

III.A Densité électronique et fréquence de plasma

L'atmosphère sera, dans un premier temps, assimilée à un gaz parfait en équilibre isotherme de température $T_0 = 270$ K dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\hat{e}_z$. On notera R la constante molaire des gaz parfaits, $\mathcal{N}_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ la constante d'AVOGADRO et $k_B = R/\mathcal{N}_A = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ la constante de BOLTZMANN. La pression au sol sera prise égale à $P_0 = 1$ bar.

- – 26. Calculer la densité particulaire atmosphérique n^* (nombre de molécules par unité de volume) au niveau du sol.
- – 27. Montrer que la pression $P(z)$ évolue en fonction de l'altitude sous la forme $P(z) = P_0 \exp(-z/H)$ et exprimer la hauteur caractéristique H en fonction de k_B , T_0 , g et de la masse moyenne m_0 des molécules de l'air. Proposer un ordre de grandeur pour H .
- – 28. Là où la densité particulaire des ions est maximale, on considérera que $\exp(-z/H) \simeq 10^{-10}$. En déduire une estimation de la densité particulaire n_{\max} des ions (N_2^+ et O_2^+) à cette altitude.

Dans toute la suite on pourra considérer que la densité volumique n_0 commune des ions et des électrons dans la haute atmosphère vérifie en tout point $n_0 \leq 10^{12} \text{ m}^{-3}$.

On s'intéresse aux évolutions spontanées d'un système comportant des électrons (charge $-e$, masse m_e) en densité particulaire uniforme n_0 au sein d'un milieu ionisé comportant aussi n_0 ions positifs de charge $+e$, immobiles. Le mouvement des électrons est caractérisé par la vitesse exprimée, en notations complexes, sous la forme $\vec{v} = \underline{v}_0 e^{i\omega t} \hat{e}_x$ en présence du champ électrique $\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i\omega t} \hat{e}_x$.

- – 29. Montrer que le champ magnétique est nécessairement statique. On négligera ce champ dans toute la suite de cette partie **III.A**.
- – 30. Expliciter la seconde loi de NEWTON pour un des électrons mobiles.
En déduire que la densité volumique de courant \vec{j} vérifie la relation $\vec{j} = \underline{\gamma}(\omega) \vec{E}$ et exprimer la conductivité électronique $\underline{\gamma}(\omega)$ en fonction de ω , n_0 , e et m_e .
- – 31. Rappeler l'équation de MAXWELL-AMPÈRE; on notera ε_0 la permittivité électronique du vide et μ_0 sa perméabilité magnétique.
En déduire que les électrons et le champ électrique oscillent spontanément à la pulsation ω_p que l'on exprimera en fonction de n_0 et de constantes fondamentales.
- – 32. Dans la suite, on adoptera la formulation numérique $\omega_p = \alpha \sqrt{n_0}$ où $\alpha = 56$ SI. Quel est le domaine de fréquence maximal de ces *oscillations de plasma* dans la haute atmosphère terrestre ?

III.B Propagation d'ondes électromagnétiques dans l'atmosphère

Dans cette partie **III.B** on étudie la propagation des ondes électromagnétiques dans l'atmosphère caractérisé, à la pulsation ω , par une densité volumique de charge nulle et la densité volumique de courants $\vec{j} = -n_0 e \vec{v}$ avec une vitesse des électrons donnée par l'équation diélectrique (3) écrite en notations complexes :

$$im_e \omega \vec{v} = -e \vec{E} - m_e \frac{\omega_0^2}{i\omega} \vec{v} - \frac{m_e}{\tau} \vec{v} \quad (3)$$

où ω_0 et τ sont des constantes positives. Les champs électrique et magnétique de l'onde ont pour expression complexe $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right]$ et $\vec{B} = \vec{B}_0 \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right]$.

- – 33. Décrire en quelques mots l'origine de chacun des termes de l'équation (3). Pourquoi n'y a-t-il aucun terme lié au champ magnétique \vec{B} ? Quelle est la signification physique de la constante τ ? Quelle est la particularité du modèle si $\tau \rightarrow \infty$? *On se placera dans ce cas dans toute la suite.*
- – 34. Montrer que les ondes électromagnétiques dans un tel milieu sont transverses puis établir leur équation de dispersion exprimant \vec{k}^2 en fonction de la célérité c de la lumière dans le vide, ω , ω_0 et de la constante ω_p définie dans la partie **III.B**.

Dans la *basse* atmosphère, on étudie la propagation d'ondes électromagnétiques dans le domaine lumineux; on admet que dans ces conditions ces ondes vérifient la condition $\omega_p \ll \omega \ll \omega_0$. On définit dans ce cas l'indice optique N par l'expression $v_\varphi = c/N$ de la vitesse de phase.

- – 35. Exprimer N en fonction de ω , ω_0 et ω_p au premier ordre non nul en ω du développement limité. Commenter le résultat obtenu.

Dans la *haute* atmosphère (l'ionosphère), on admet que la propagation d'ondes électromagnétiques du domaine radio HF est caractérisée par $\omega_0 = 0$.

- – 36. Que devient ici l'équation de dispersion? Dans quel domaine de fréquence le milieu est-il transparent? La propagation est-elle dispersive?

III.C Écho ionosphérique

Le dispositif étudié ici est basé sur un émetteur au sol situé en $z < 0$. Cet émetteur envoie dans la basse atmosphère (assimilée au vide) et en direction de l'ionosphère, une onde électromagnétique incidente de champ électrique $\vec{E}_i = E_0 \exp [i\omega (t - z/c)] \hat{e}_x$.

La réflexion sur la surface $z = 0$ séparant le vide de l'ionosphère crée une onde réfléchie de champ électrique $\vec{E}_r = \underline{\rho} E_0 \exp [i\omega (t + z/c)] \hat{e}_x$. La réflexion crée aussi une onde transmise dans l'ionosphère de champ électrique $\vec{E}_t = \underline{\beta} E_0 \exp [i(\omega t - kz)] \hat{e}_x$.

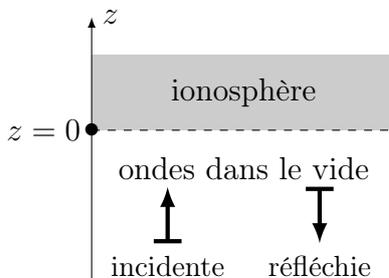


FIGURE 6 – Modèle pour l'étude des échos ionosphériques

L'ionosphère sera décrite comme un milieu équivalent au vide dans lequel la relation de dispersion est de la forme $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$ où $\omega_p > 0$ est la pulsation définie à la partie **III.B**. Enfin, on admet, en l'absence de toute discontinuité surfacique sur le plan $z = 0$, la continuité de toutes les composantes du champ électromagnétique de part et d'autre de ce plan.

- – 37. Exprimer les champs magnétiques \vec{B}_i , \vec{B}_r et \vec{B}_t associés respectivement à chacune des ondes incidente, réfléchie et transmise en fonction, suivant les cas, de E_0 , c , ω , t , z , k , $\underline{\rho}$ ou $\underline{\beta}$.

En déduire l'expression de $\underline{\rho}$ en fonction de ω , c et k puis en fonction de ω et ω_p .

- – 38. Quelle est la signification de la grandeur $R = |\underline{\rho}|^2$?
 Sans étudier la fonction, tracer l'allure qualitative de la courbe $\omega \mapsto R(\omega)$, en distinguant les deux cas $\omega < \omega_p$ et $\omega > \omega_p$.

Dans quel cas observe-t-on un écho ionosphérique ?

On rappelle ici que la grandeur ω_p dépend de la densité électronique n_0 de l'ionosphère ; cette densité électronique croît en général du sol (où on prendra $n_0 = 0$) vers les hautes altitudes. Le signal émis, de pulsation ω variable, est constitué d'impulsions brèves de durée Δt .

- – 39. Comment choisir Δt pour que la mesure de la durée séparant l'émission du signal et la réception de l'écho permette de mesurer l'altitude h de la surface de réflexion ?

Le décalage en fréquence (effet DOPPLER) de l'onde réfléchie renseigne sur les déplacements de l'air au sein de l'atmosphère. Avec trois récepteurs au minimum il est possible de mesurer par triangulation la direction et la vitesse des perturbations.

Lame à retard pilotable

Extrait de Centrale-Supélec 2017

À l'aide de lames biréfringentes, on peut réaliser un filtre accordable qui permet d'extraire d'un faisceau lumineux polychromatique une longueur d'onde particulière modifiable par une commande externe. Ce dispositif utilise des cristaux liquides, matériaux biréfringents dont le comportement dépend de la tension appliquée aux bornes de deux électrodes. Dans cet extrait de problème, nous n'allons pas étudier ce filtre en entier, mais seulement le rôle de ces cristaux liquides.

La partie III.A (supprimée) conduit à rappeler que dans un milieu diélectrique isotrope de permittivité diélectrique réelle ϵ_r , une onde électromagnétique plane progressive harmonique de pulsation ω se propage avec une pulsation spatiale $k = n\omega/c$, avec $n = \sqrt{\epsilon_r}$. Dans toute la suite, l'espace est repéré par le système de coordonnées cartésiennes $(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

III.B – Lame biréfringente

Un matériau biréfringent est un matériau anisotrope dont la permittivité diélectrique relative dépend de la direction du champ électrique. Les matériaux biréfringents utilisés ici sont tels que la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique se propageant selon \vec{u}_z diffère selon la direction du champ électrique et donc selon la polarisation de l'onde. Les lames biréfringentes utilisées ici sont telles que les ondes lumineuses polarisées linéairement selon deux directions orthogonales, appelées axes neutres de la lame, se propagent selon \vec{u}_z comme elles le feraient dans un milieu isotrope (cf III.A), mais avec des indices optiques différents. Les deux axes neutres de la lame sont notés (Ox) et (Oy) et on désigne par n_x (respectivement n_y) l'indice optique de la lame pour l'onde électromagnétique se propageant selon \vec{u}_z et polarisée selon \vec{u}_x (respectivement selon \vec{u}_y). On néglige tout phénomène d'absorption dans le milieu biréfringent et on choisit $n_x > n_y$.

III.B.1) L'axe neutre de la lame biréfringente pour lequel la vitesse de propagation de l'onde est plus élevée est appelé *axe rapide*. L'autre axe neutre est appelé *axe lent*. Dans le cas où $n_x > n_y$, déterminer l'axe rapide.

III.B.2) La lame d'épaisseur e occupe l'espace $0 \leq z \leq e$. L'onde traverse la lame perpendiculairement, à z croissant. On représente son champ électrique à l'entrée de la lame par :

$$\vec{E}(z = 0^+, t) = (E_{0x}\vec{u}_x + E_{0y}e^{j\varphi}\vec{u}_y) e^{j(\omega t + \chi)} = E_{0x} (\vec{u}_x + \alpha e^{j\varphi}\vec{u}_y) e^{j(\omega t + \chi)} \quad \text{avec } E_{0x} \text{ et } \alpha \text{ réels positifs}$$

a) Donner l'état de polarisation de l'onde en $z = 0^+$ pour chacune des valeurs $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = \pi$ et $\varphi = 3\pi/2$.

b) Préciser, lorsque cela est possible, la condition sur α pour observer une polarisation circulaire.

c) Représenter pour chaque valeur de φ , dans le cas où $\alpha < 1$, la trajectoire dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ du point M défini par $\vec{OM}(t) = \vec{E}(z = 0^+, t)$. Indiquer le sens de parcours de la trajectoire. Identifier, le cas échéant, le caractère droit ou gauche de la polarisation correspondante.

III.B.3) Mettre la représentation complexe du vecteur champ électrique en un point d'abscisse z de la lame sous la forme : $\vec{E}(z, t) = E_{0x} (\vec{u}_x + \alpha e^{j\varphi'}\vec{u}_y) e^{j(\omega t + \chi')}$, en précisant les expressions de φ' et χ' . Comparer l'état de polarisation de l'onde en $z > 0$ et en $z = 0^+$. Pourquoi parle-t-on de « lame à retard » ?

III.B.4) Dans toute la suite, on admet que la transmission sous incidence normale d'une onde plane progressive sinusoïdale entre deux diélectriques transparents, d'indices réels différents, n'affecte pas les valeurs de φ et de α : la transmission n'affecte pas l'état de polarisation. Exprimer φ' à la sortie de la lame biréfringente sous la forme $\varphi' = \varphi + \frac{2\pi\delta}{\lambda}$, où δ est à exprimer en fonction de n_x , n_y et e .

III.B.5) On prend ici $\varphi = 0$ et $\alpha = 1$. Identifier l'état de polarisation de l'onde en $z = 0$ et les plus petites valeurs non nulles δ_C et δ_R de δ qui génèrent respectivement, en $z = e$, une onde de polarisation circulaire droite et une onde polarisée rectilignement. À quels types de lames correspondent-elles ?

III.C – Production et sélection d'ondes polarisées circulairement

Cette question n'est pas guidée et demande de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

III.C.1) Vous disposez d'une source lumineuse émettant un faisceau parallèle de lumière non polarisée à la longueur d'onde λ_0 . Comment produire une lumière polarisée, de polarisation circulaire droite ? Même question pour une lumière de polarisation circulaire gauche.

III.C.2) Concevoir un sélecteur de polarisation circulaire droite (respectivement gauche), c'est-à-dire un filtre de polarisation qui, à partir d'une onde polarisée quelconque transmet (sans pertes) la composante de l'onde de polarisation circulaire droite (respectivement gauche), tout en supprimant totalement la composante de polarisation circulaire gauche (respectivement droite). Pour concevoir ces deux dispositifs, on n'utilisera que des polariseurs parfaits, des lames quart d'onde et demi onde, sans pertes à la longueur d'onde λ_0 .

III.D – Association de lames biréfringentes

III.D.1) lame de calcite

Le filtre optique utilise une lame de calcite d'épaisseur $e_c = 447 \mu\text{m}$ et telle que $\Delta n = n_x - n_y = 0,156$ pour la longueur d'onde $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$.

a) Calculer pour cette longueur d'onde la valeur de δ notée δ_c .

b) On supposera pour la suite que δ_c est indépendant de λ ; quel est alors le phénomène négligé ?

III.D.2) lame à cristaux liquides

Le film de cristaux liquides se comporte comme une lame à retard d'épaisseur $e_{CL} = 7,5 \mu\text{m}$, de valeur δ_{CL} contrôlée par la différence de potentiel U appliquée aux bornes des électrodes de la cellule. Les variations de δ_{CL} avec U sont indiquées par la courbe de la figure 7, supposée indépendante de λ dans la gamme de longueurs d'onde utilisée dans la technologie WDM.

On cherche à réaliser, pour toutes les longueurs d'onde comprises entre 1565 nm et 1535 nm, la condition $\delta_{CL} = \delta_R$ (où δ_R est défini en III.B.5).

Que dire de la plage des valeurs de U permettant de répondre à ce besoin ?

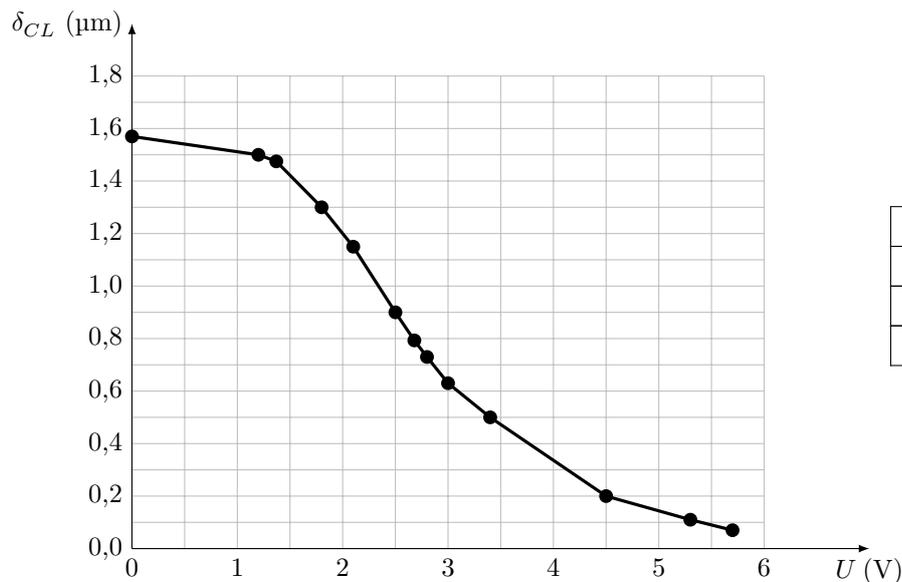


Figure 7 Variations de δ_{CL} avec la tension U

III.D.3) lame complète

Pour corriger cet inconvénient, on accole la lame de calcite du III.D.1 à la lame à cristaux liquides du III.D.2 de telle sorte que leurs axes rapides soient confondus, ce qui donne une lame biréfringente L équivalente d'épaisseur $e_c + e_{CL}$.

a) Justifier l'obtention en sortie de L d'une onde polarisée rectilignement *différente* de l'état de polarisation de l'onde incidente, comme en III.B.5, à condition de satisfaire la relation :

$$\delta_c + \delta_{CL} = (2p + 1)\delta_R \quad \text{avec } p \text{ entier}$$

b) Parmi les valeurs $p = 44$, $p = 45$, $p = 46$, déterminer celle permettant de réaliser la condition recherchée, pour toutes les longueurs d'onde souhaitées, lorsque U varie entre 0 et 6 V.

c) En déduire la nouvelle plage des valeurs de U permettant d'obtenir la polarisation rectiligne recherchée en sortie de L' , pour toutes les longueurs d'onde souhaitées. Quel est l'intérêt de la lame de calcite ?

d) Préciser la valeur U_0 de U réalisant la condition souhaitée pour $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$.

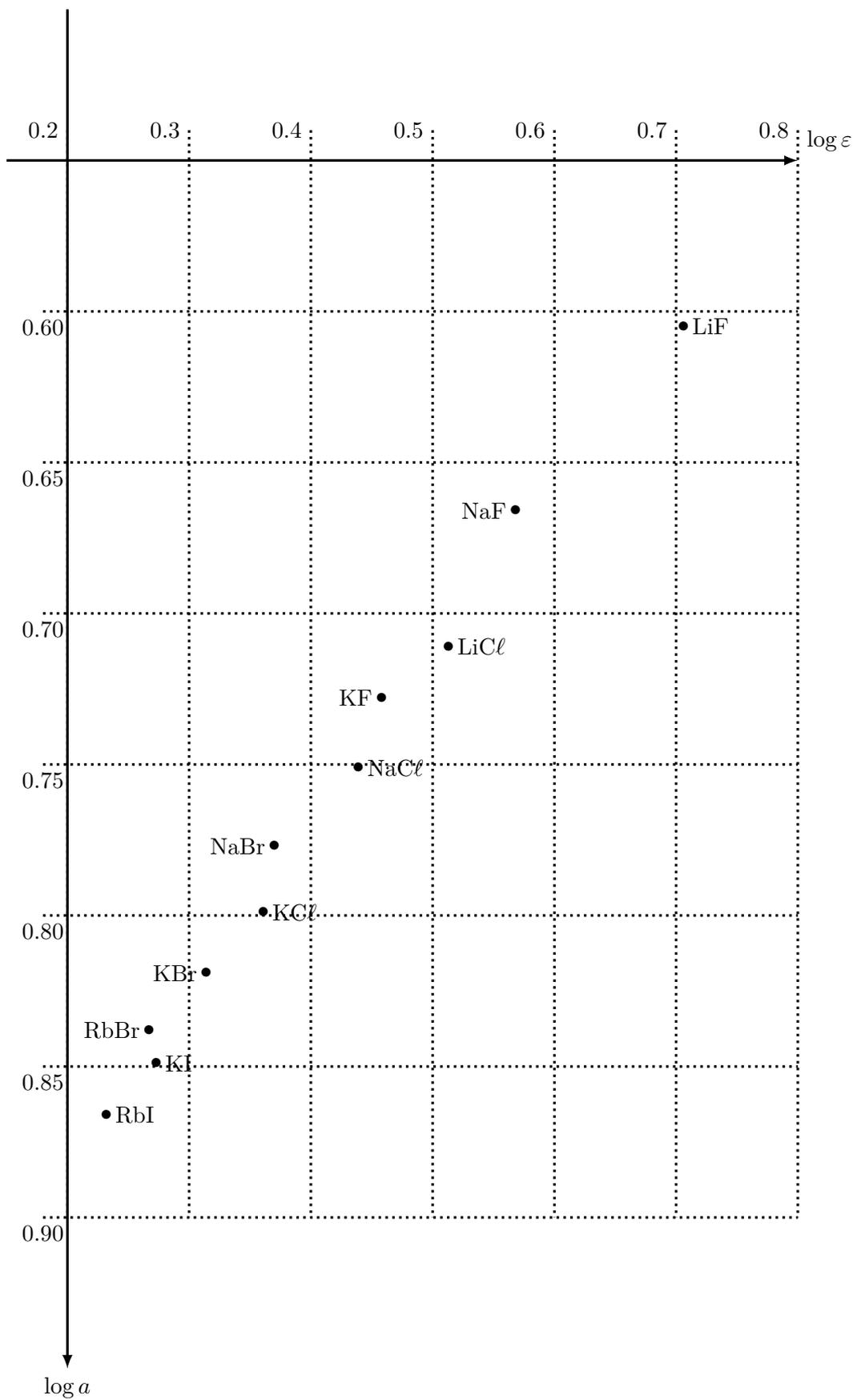


FIGURE 6 – À RENDRE AVEC LA COPIE

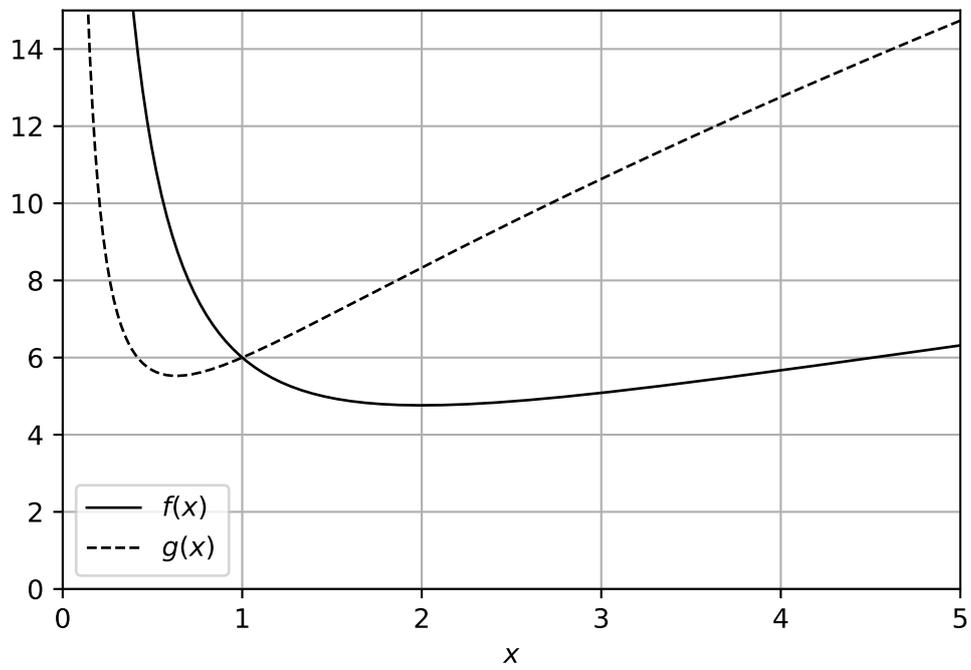


FIGURE 7 – À RENDRE AVEC LA COPIE