Mathématiques — préparation à l'oral
Nombres complexes, polynômes

Exercice 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On note A, B, C les points d'affixes respectives z, z^2, z^3 .

0664-17

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur z pour que l'orthocentre du triangle ABC soit l'origine.

Exercice 2. Trouver les racines du polynôme $X^2 - 2X + i$.

0375-17

Exercice 3. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

0502-15

Exercice 4. 1. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)$.

A008-25

2. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X + 1)P(X)$.

Exercice 5. Trouver tous les polynômes réels P tels que $(X^2 - X)P''(X) = 6P(X)$.

A056-25

Exercice 6. On considère le polynôme $P = X^3 - 3X + 1$.

P084-14

1. Prouver que le polynôme P possède trois racines réelles distinctes. On les note a, b, c .

2. Calculer $a^4 + b^4 + c^4$.

Exercice 7. Soient $x_0, \dots, x_n$ des nombres complexes tous distincts. Soient $y_0, \dots, y_n, z_0, \dots, z_n$ des nombres complexes quelconques.

0770-17

Montrer qu'il existe un unique polynôme H dans $\mathbb{C}_{2n+1}[X]$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad H(x_k) = y_k \quad \text{et} \quad H'(x_k) = z_k.$$

Exercice 8.

A028-23

Soit un entier $n \geq 2$. On pose $P = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (X - \omega)$ et $S = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \omega}$.

1. Simplifier l'expression de P .

2. Simplifier l'expression de S .

Exercice 9. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On lui associe une fonction $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

A009-25

$$Q(x) = e^{-x} \int_0^x P(t)e^t dt.$$

Montrer que Q est une fonction polynomiale si et seulement si $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k P^{(k)}(0) = 0$.

Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 10. Soient $z_0, \dots, z_n$ des nombres complexes tous distincts. Montrer que la famille $((X - z_k)^n)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

0669-17

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

S001-22

a. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de f . Montrer que f est un multiple de Id_E .

b. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f commute avec tous les endomorphismes de E . Montrer que f est un multiple de Id_E .

Exercice 12. On considère une famille $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_p)$ d'éléments de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et une famille $\mathcal{G} = (G_1, \dots, G_n)$ d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. A007-23

Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on pose $M_{i,j} = F_i \times G_j^T$.

1. Montrer que la famille $(M_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{G}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. Soit un entier $r \leq \min(p, n)$. Déterminer le rang de la matrice $\sum_{k=1}^r M_{k,k}$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n . Soient u et v deux endomorphismes de E . A014-23

1. Prouver la majoration $\text{rg}(u+v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.

2. On suppose que $u \circ v$ est nul et que $u+v$ est bijectif.

Prouver les égalités $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = n$ et $\text{Im}(v) = \text{Ker}(u)$.

Exercice 14. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n . A017-17

1. Si f est un projecteur, quel est le lien entre $\text{rg}(f)$ et $\text{tr}(f)$?

2. Si $\text{rg}(f) = \text{tr}(f) = 1$, montrer que f est un projecteur.

Exercice 15. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E qui commutent. 0381-17

Montrer que $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont des projecteurs et préciser leurs axes.

Exercice 16. Soient p et q deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. On fait les hypothèses 0687-15

$$p + q = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \text{rg}(p) + \text{rg}(q) \leq \dim(E).$$

Montrer que p et q sont des projecteurs.

Exercice 17. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit f un endomorphisme de E . On suppose que f^n est nul et que f^{n-1} ne l'est pas. A046-16

On note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f .

1. Montrer qu'il existe un vecteur a de E tel que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E .

2. Montrer que $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(f)$.

Matrices

Exercice 18. Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose que A032-24

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que AB est une matrice de projection.

2. Montrer que $BA = I_2$.

Exercice 19. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$. 0783-17

a. Déterminer le rang de M .

b. Calculer M^{-1} en cas d'existence.

Exercice 20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + X^T = \text{tr}(X)A$.

0507-17

Exercice 21. Soit M une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que M^T commute avec M . Montrer que M est diagonale.

0387-17

Exercice 22. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A et A^T sont semblables.

0776-17

Exercice 23. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Soient X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

0397-17

Montrer que l'inversibilité de la matrice $A + Y \times X^T$ équivaut à $X^T \times A^{-1} \times Y \neq -1$.

Exercice 24. On définit les matrices

A072-17

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 2 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer les inverses de ces matrices. Trouver un lien entre N et M^2 .

Exercice 25. Trouver tous les couples (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les égalités $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

0689-15

Exercice 26. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que les matrices A , B et $A + B$ sont de rang 1. Montrer alors qu'au moins l'une des deux égalités $\text{Im}(A) = \text{Im}(B)$ et $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(B)$ est vraie.

0216-15

Déterminant

Exercice 27. 1. On considère des polynômes unitaires $P_0, \dots, P_{n-1}$ tels que pour tout indice k concerné, le polynôme P_k soit de degré k . Soient $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}$.

A071-17

Calculer le déterminant de la matrice $(P_{j-1}(a_i))_{1 \leq i, j \leq n}$.

2. Soient $x_1, \dots, x_n$ dans $\mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $(\cos((j-1)x_i))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice 28. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $M = \begin{pmatrix} I_n & -A \\ B & I_n \end{pmatrix}$.

0396-17

Montrer l'égalité $\det(M) = \det(I_n + AB)$.

Exercice 29. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

0819-19

Exercice 30. Calculer $\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 + a_3 & \cdots & a_n + a_1 \\ a_1^2 + a_2^2 & a_2^2 + a_3^2 & \cdots & a_n^2 + a_1^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n + a_2^n & a_2^n + a_3^n & \cdots & a_n^n + a_1^n \end{vmatrix}$.

A062-25

Exercice 31. Soient A et X deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice X étant de rang 1. Prouver l'inégalité $\det(A + X) \det(A - X) \leq \det(A^2)$.

0695-15

Réduction

Exercice 32. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}^*$. Déterminer les valeurs propres de la matrice A de coefficients $a_{i,j} = \lambda_i/\lambda_j$.

0037-17

Exercice 33. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

0407-17

Déterminer la dimension de $\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; AB = BA\}$.

Exercice 34. Trouver les racines carrées de $\text{Diag}(1, 2, -1, -1)$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

0794-17

Exercice 35. Pour tout polynôme réel P , on pose $f(P) = (X^3 - X)P' - (X^2 - 1)P$.

A012-17

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f .

Exercice 36. Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on pose $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble de toutes les matrices de cette forme.

A036-17

1. On pose $J = M(0, 1, 0)$. Calculer J^2 puis exprimer $M(a, b, c)$ en fonction de I, J, J^2 .

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension. Montrer également que E est stable par produit.

3. Vérifier que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et exprimer son spectre à l'aide de $j = e^{i2\pi/3}$. Trouver une base de diagonalisable pour J .

En déduire que $M(a, b, c)$ est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

4. Montrer que les valeurs propres de $M(a, b, c)$ sont réelles si, et seulement si, les coefficients b et c sont égaux.

5. On note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme canoniquement associé à $M(a, b, c)$ et on suppose que ce n'est ni l'identité ni l'application nulle.

À quelles conditions sur (a, b, c) l'endomorphisme $f_{a,b,c}$ est-il un projecteur ? Dans ce cas, préciser son noyau et son image.

Exercice 37. Une *matrice stochastique* est une matrice carrée à coefficients réels positifs telle que sur chaque ligne, la somme des coefficients soit égale à 1.

A045-17

1. Soient A et B deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \times B$ est stochastique.

2. Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que 1 est une valeur propre de A et que toutes les valeurs propres de A ont un module majoré par 1.

3. Montrer l'égalité $\text{Ker}(A - I) = \text{Ker}((A - I)^2)$.

Exercice 38. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A066-17

Montrer que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais pas diagonalisable.

Exercice 39. Soit un entier $n \geq 2$. Soit A une matrice de rang 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A057-17

1. Montrer que 0 est une valeur propre de A .

2. Montrer que la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.

Exercice 40. On considère les matrices

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

0988-15

a. Montrer que J et K sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et trouver leurs éléments propres.

b. Diagonaliser la matrice $M(a, b, c)$.

Exercice 41. Soit un entier $n \geq 2$. On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 0 et les autres coefficients valent 1.

A006-23

1. Calculer A^2 . En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} .

2. Déterminer les valeurs propres de A et les espaces propres correspondants.

Exercice 42. 1. Question de cours : rappeler la définition d'un endomorphisme diagonalisable et ses caractérisations.

A033-23

2. Soit $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$. On suppose que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{2, i, -i\}$.

Trouver toutes les valeurs possibles pour la trace de A et le déterminant de A .

Exercice 43. Soit un entier $n \geq 2$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $P \in E$, on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X-1)$.

A037-23

1. Vérifier que Δ est un endomorphisme de E .

2. On note $\mathcal{E} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

Vérifier que $M_{\mathcal{E}}(\Delta)$ est une matrice triangulaire supérieure et que son rang vaut n .

3. Montrer que Δ possède une unique valeur propre et déterminer l'espace propre associé.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $P \in E$, on pose

$$u(P) = P(X+a) \quad \text{et} \quad v(P) = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} P^{(k)}.$$

Pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, calculer $u(X^p)$ et $v(X^p)$. En déduire l'égalité $u = v$.

5. Pour tout $P \in E$, démontrer l'égalité

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^n \frac{1 - (-1)^k}{k!} P^{(k)}.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $F_{\alpha} = \{P \in E ; \Delta(P) = \alpha P'\}$.

6. Montrer que $F_{\alpha} = \{0\}$ si $\alpha \neq 2$ et déterminer F_2 .

Exercice 44. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n .

A026-23

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f possède n valeurs propres distinctes.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que f et $P(f)$ sont diagonalisables et admettent une base de diagonalisation commune.

2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que f et g commutent. Montrer que g est diagonalisable.

3. Montrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f est $\{Q(f) ; Q \in \mathbb{C}[X]\}$.

Exercice 45. Résoudre l'équation $A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

A019-23

Exercice 46. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

A026-25

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on fait l'hypothèse $\text{tr}(A^k) = 0$.

Montrer que A est nilpotente.

Exercice 47. Soit $A \in \text{GL}_6(\mathbb{R})$ vérifiant les relations

1315-12

$$A^3 - 3A^2 + 2A = 0 \quad \text{et} \quad \text{tr}(A) = 8.$$

Déterminer le polynôme caractéristique de A .

Exercice 48. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation

1316-12

$$A^4 - 2A^3 + 2A^2 = 0.$$

Montrer que sa trace est un entier pair.

Exercice 49. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation $A^3 - A - I_n = 0$. Montrer que son déterminant est strictement positif.

1317-12

Exercice 50. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On fait les hypothèses

0803-17

$$\text{tr}(A) = 0, \quad \text{rg}(A) = 2, \quad A^n \neq 0.$$

Montrer que la matrice A est diagonalisable.

Espaces euclidiens

Exercice 51. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, on pose

A085-17

$$(P|Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

a. Prouver qu'on a alors défini un produit scalaire.

b. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 52. On rappelle que la formule $(P|Q) = \int_0^1 P(x)Q(x) dx$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

A029-17

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on considère le polynôme $P_n = \sqrt{n}(1 - X)^n$.

1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $\|P_n\|^2$.

2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme T de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad (T|P) = P(0).$$

Exercice 53. Pour tout couple (P, Q) de polynômes réels, on pose $(P|Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$.

A042-17

1. Montrer que $(P|Q)$ est bien défini.

2. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire.

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on admet l'existence d'un polynôme T_n vérifiant l'identité

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Montrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

Exercice 54. Soit A une matrice symétrique définie positive. Montrer que ses coefficients diagonaux sont strictement positifs.

0698-17

Exercice 55. Soit E un espace euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormée $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$.

A037-25

On considère l'endomorphisme f de E défini par

$$M_{\mathcal{E}}(f) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que f est une projection orthogonale et préciser sur quel sous-espace F de E elle s'effectue.

2. On note g la projection orthogonale sur $F^{\perp}$. Déterminer $M_{\mathcal{E}}(g)$.

Exercice 56. On considère une matrice M décomposée par blocs sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

0817-17

On suppose que M est une matrice orthogonale. Montrer l'égalité $|\det(A)| = |\det(D)|$.

Exercice 57.

A016-23

On considère la matrice $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à cette matrice.

Caractériser géométriquement cette matrice.

Exercice 58. Soient U et V deux éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $(U + 5V)/6$ soit orthogonale. Généraliser.

0815-17

Exercice 59. Soit M une matrice de $GL_n(\mathbb{R})$.

0422-17

a. Montrer l'existence d'une matrice orthogonale O et d'une matrice triangulaire supérieure T telles que $M = OT$.

b. Montrer la majoration $\det(M)^2 \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2 \right)$.

Exercice 60. Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs d'un espace euclidien E .

0541-15

a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=1}^n \|x - x_k\|^2$ possède un minimum sur E et que ce minimum est atteint en un unique point, qui sera noté y dans la suite.

b. Exprimer $f(y)$ en fonction de $\|y\|$ et des nombres $\|x_k\|$.

Exercice 61. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Soit a un vecteur unitaire de E . Soit $k \in \mathbb{R}$.

A031-23

Pour tout $x \in E$, on pose $g_k(x) = x + k\langle x|a \rangle a$.

1. Montrer que g_k est un endomorphisme symétrique de E .

2. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de g_k .

3. Déterminer pour quelles valeurs de k l'endomorphisme g_k est bijectif.

Exercice 62. Pour toute matrice symétrique réelle A , prouver l'inégalité $\operatorname{tr}(A)^2 \leq \operatorname{rg}(A)\operatorname{tr}(A^2)$.

A061-17

Exercice 63. Soit E un espace euclidien de dimension 2.

A017-25

On considère p et q , deux projecteurs orthogonaux de E non nuls et différents de l'identité.

On pose $u = p + q$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 2]$ tel que $\text{Sp}(u) = \{\alpha, 2 - \alpha\}$.

2. Réciproquement, si u est un endomorphisme symétrique de E dont le spectre est $\{\alpha, 2 - \alpha\}$ pour un certain nombre $\alpha \in [0, 2]$, montrer que u est la somme de deux projecteurs orthogonaux.

Exercice 64. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

A038-25

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.

2. Montrer qu'il existe une matrice carrée C inversible de taille paire telle que A soit semblable à $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Espaces vectoriels normés

Exercice 65. 1. Donner la norme euclidienne habituelle sur $\mathbb{R}^n$. Existe-t-il d'autres normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^n$?

A027-23

Dans la suite, la norme euclidienne habituelle sur $\mathbb{R}^n$ est notée $\| \cdot \|$. La sphère unité correspondante est notée S .

2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que la fonction $x \mapsto \|f(x)\|$ admet un maximum sur S . Ce maximum est noté $\| \|f\| \|$.

3. Pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, prouver l'inégalité $\| \|f \circ g\| \| \leq \| \|f\| \| \times \| \|g\| \|$.

4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\| \|f\| \| < 1$. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} f^k$ est convergente et que sa somme est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 66. On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout élément f de E , on note

A032-15

$$g_1(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad g_2(f) = \int_0^1 e^t |f(t)| dt.$$

1. Montrer que g_1 et g_2 sont des normes sur E .

2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ dans les espaces vectoriels normés (E, g_1) et (E, g_2) .

3. Les normes g_1 et g_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 67. 1. Soient x et y deux vecteurs d'un espace préhilbertien E . Simplifier $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$.

A044-25

2. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Étant donné une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ de E , on définit une fonction $\| \cdot \|_{\infty, \mathcal{B}}$ de E dans $\mathbb{R}$ par

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k b_k \right\|_{\infty, \mathcal{B}} = \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Montrer que $\| \cdot \|_{\infty, \mathcal{B}}$ est une norme sur E .

3. On prend $E = \mathbb{R}^n$. La norme euclidienne canonique est-elle la norme infinie relative à une certaine base ?

Exercice 68. Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, on pose $\|M\|_\infty = \max\{|m_{i,j}|; 1 \leq i, j \leq d\}$.

A045-23

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

2. On pose $N = A - I_3$. Calculer N^2 , puis les autres puissances de N .

3. Déterminer la limite de $\|A^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

4. Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

5. Pour tout couple (M, N) de matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, prouver la majoration

$$\|MN\|_\infty \leq d \times \|M\|_\infty \times \|N\|_\infty.$$

6. On suppose que M est diagonalisable et possède au moins une valeur propre de module strictement supérieur à 1.

Déterminer la limite de $\|M^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Suites numériques

Exercice 69. Montrer que les suites $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$, $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\cos(\sqrt{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ sont divergentes.

0893-15

Exercice 70.

A019-23

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $P_n = -4 + \sum_{k=1}^n X^k$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que P_n possède une unique racine dans $]0, +\infty[$. Cette racine est notée x_n .

2. Calculer x_1 et x_2 . Montrer que $x_5 < 1$.

3. Quel est le signe de $P_{n+1}(x_n)$? En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est monotone puis qu'elle converge. Sa limite est notée ℓ .

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$.

5. Montrer que x_n^{n+1} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et en déduire la valeur de ℓ .

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\delta_n = x_n - \ell$.

Vérifier l'égalité $\delta_n = \frac{1}{5}x_n^{n+1}$ et en déduire que $n\delta_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

7. Trouver une constante K telle que δ_n soit équivalent à $K \times \ell^{n+1}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 71. Pour tout entier $n \geq 2$, montrer que l'équation $x^n = x + 1$ possède une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée x_n .

1103-17

Obtenir un développement asymptotique de x_n sous la forme $a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 72. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) \right)^n$.

A086-19

Exercice 73. Montrer que $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

A018-15

Exercice 74. On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

0447-15

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{3 + u_n}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ à déterminer puis dominer $u_n - \ell$.

Exercice 75. Pour tout x réel, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

A012-23

Trouver un équivalent de $\{n!e\}$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

Exercice 76. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \left] n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2} \right[$.

A035-23

On définit la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ sur la réunion des I_n .

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction tangente.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans I_n , notée x_n dans la suite.
3. Montrer que x_n est équivalent à $n\pi$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $y_n = \text{Arctan}(x_n)$. En déduire la limite de y_n quand n tend vers $+\infty$.
5. Montrer que $\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right)$ équivaut à $y_n - \frac{\pi}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.
6. En déduire un développement asymptotique de la forme $y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
7. Obtenir un développement asymptotique de la forme $y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 77. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant l'identité $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(\cos(x))$.

0445-17

Exercice 78. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse $\int_0^1 f(t) dt = 1/2$.

0452-17

Montrer que f possède au moins un point fixe. Y a-t-il unicité ?

Exercice 79. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x/\ln(x)$ réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur lui-même. Déterminer un équivalent de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

0450-17

Exercice 80. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}$. On pose également $f(0) = 0$.

0584-17

- a. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- b. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- c. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f^{-1} .

Exercice 81. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable différente de la fonction nulle. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que

A004-25

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f'(x)| \leq M \times |f(x)|.$$

Montrer que f ne s'annule en aucun point de $[0, 1]$.

Exercice 82. Soit $x > 0$.

A014-25

1. Montrer qu'il existe un unique t réel tel que $\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} \operatorname{sh}(tx)$. On le note t_x .
2. Montrer que t_x est dans $]0, 1[$.
3. Étudier la limite de t_x quand x tend vers 0 puis quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 83. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1]$, telles que $f \circ g = g \circ f$.

0580-17

On veut montrer qu'il existe x dans $[0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il n'existe pas de tel x . Quitte à échanger les rôles de f et de g , on fait l'hypothèse $f(0) > g(0)$.

- a. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout x dans $[0, 1]$, on ait $f(x) \geq g(x) + c$.
- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, prouver l'inégalité

$$f^{on}(x) \geq g^{on}(x) + nc,$$

où la notation f^{on} désigne la composée n -ième de f avec elle-même.

- c. Conclure.

Exercice 84. Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \circ g$ est décroissante. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ admettent un unique point fixe.

0721-17

Exercice 85. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit $f_n : x \mapsto (1 + x^2)^{n + \frac{1}{2}}$ sur $\mathbb{R}$.

0094-17

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $\mathbb{R}$, prouver la relation $f_n^{(2n+2)}(x) = \left(\prod_{k=0}^n (2k+1)^2 \right) (1+x^2)^{-n-\frac{3}{2}}$.

Exercice 86. Trouver la limite de $(\sin(x))^{1/\cos(x)}$ quand x tend vers $\pi/2$ par valeurs strictement inférieures.

0469-15

Exercice 87. Trouver la limite de $x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - ex^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

0734-15

Séries numériques

Exercice 88. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs.

1060-12

- a. Montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{1+u_n}$ a la même nature que la série de terme général u_n .
- b. Est-ce encore le cas avec la série de terme général $\frac{u_n}{1+(u_n)^2}$?

Exercice 89. Soit $\alpha \in]0, +\infty[$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $u_n = n^{-\alpha}$ si l'écriture décimale du nombre n n'utilise pas le chiffre 9 et $u_n = 0$ dans le cas contraire.

0654-11

Nature de la série de terme général u_n .

Exercice 90. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

0719-17

- a. Justifier l'existence de R_n .
- b. Montrer que $(n+1)!R_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
- c. En déduire la nature de la série $\sum \sin(2\pi en!)$.

Exercice 91. Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \left(\cos \left(\frac{1}{n^\alpha} \right) \right)^n$ selon la valeur de $\alpha > 0$.

0898-10

Exercice 92. Étudier la série $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$ (convergence et convergence absolue).

A050-17

Exercice 93. Soit $\alpha > 0$. Nature de la série de terme général $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$.

0725-15

Exercice 94. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $s(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n .

1058-12

Convergence et somme de la série de terme général $\frac{s(n)}{n(n+1)}$.

Exercice 95. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \sin(n)}$.

0830-17

Suites et séries de fonctions

Exercice 96. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = 3^n (x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$.

0731-17

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $[0, 1]$.

b. Le passage à la limite sous l'intégrale dans $\int_0^1 f_n(t) dt$ est-il valide ?

Exercice 97. Trouver l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2^n - 1}}{1 + x^{2^n}}$.

0600-17

Après avoir simplifié le produit $\prod_{n=0}^N (1 + x^{2^n})$, expliciter $f(x)$.

Exercice 98. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto nx^\alpha e^{-nx^2}$.

1119-17

Étudier les différents modes de convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 99. Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles.

A044-23

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n : x \mapsto f(x+n) - f(n)$ sur $]0, +\infty[$.

Pour tout x de $]0, +\infty[$ pour lequel la série $\sum u_n(x)$ converge, on pose $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $\sum_{n=1}^N u_n(1) = f(N+1) - f(1)$.

En déduire que l'existence de $F(1)$ équivaut à la convergence de la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2. Dans cette question, on prend pour f la fonction $x \mapsto \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$. Montrer que $F(1)$ existe.

3. Dans cette question, on prend pour f la fonction $x \mapsto \sin(\pi x + \frac{\pi}{2}\sqrt{x})$.

Montrer que $F(1)$ n'existe pas.

On pourra s'intéresser à $f((2n+1)^2)$.

Exercice 100. On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

0580-16

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Montrer que f est développable en série entière sur cet ensemble.

Exercice 101. On fixe $a > 0$ et on pose $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{a}{k^2 x^2}\right)$.

A040-25

- Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.
- Étudier la limite de f en $+\infty$ puis déterminer un équivalent.
- Étudier la limite de f en 0 puis déterminer un équivalent.

Séries entières

Exercice 102. Développer la fonction arccosinus en série entière sur $] -1, 1[$.
Ce développement est-il valable sur $[-1, 1]$?

A008-23

Exercice 103. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{n!}$.

A010-23

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et calculer sa somme.

Exercice 104. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ possède un rayon de convergence R fini et strictement positif.

0515-16

Trouver les rayons de convergence de $\sum a_n z^{2n}$, de $\sum (a_n)^2 z^n$ et de $\sum a_n z^{n^2}$.

Exercice 105. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$.

0305-17

Rayon de convergence de $\sum u_n z^n$.

Exercice 106. Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} (3 + (-1)^n)^n x^n$.

0738-17

Exercice 107. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$. Pour tout x convenable, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

0858-17

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S .
- Exprimer $S(x)$.

Exercice 108. Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\alpha}}{n} x^n$.

0863-17

Exercice 109. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}$.

0597-15

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ puis calculer sa somme.

Exercice 110. Pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_p : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{np}$.

0915-10

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière écrite ci-dessus et préciser la limite de la fonction f_p en R^- .

b. Déterminer un équivalent de $f_p(x)$ quand x tend vers R^- . On applique la méthode des rectangles.

Exercice 111. On fixe $q \in]-1, 1[$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $] - 1, 1[$ la fonction

A002-23

$$f_N : x \mapsto \prod_{k=0}^N \frac{1 + xq^k}{1 - xq^k}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $] - 1, 1[$. Sa limite simple est notée f .

2. Montrer que la fonction f ne s'annule pas et qu'elle vérifie la relation

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{1+x}{1-x} f(qx).$$

3. Montrer que la fonction f est développable en série entière sur $] - 1, 1[$ et préciser son développement.

Exercice 112. Déterminer une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - \infty, 1[$ telle que

A021-25

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right).$$

Intégration

Exercice 113. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que la fonction g est positive.

0453-17

Montrer l'existence de $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$.

Exercice 114. Trouver un équivalent simple de $\int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{\text{Arcsin}(t)} dt$ quand x tend vers 0.

0881-17

Exercice 115. Déterminer un équivalent de $\int_\alpha^1 \frac{\cos^2(x)}{x^{3/2}} dx$ quand α tend vers 0.

1114-17

Exercice 116. Le produit de deux fonctions continues et intégrables sur $]0, 1]$ est-il encore intégrable ?

0462-17

Si f est continue et intégrable sur $]0, 1/2]$, est-ce encore vrai pour $t \mapsto f(t) \ln(t)$?

Exercice 117. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité $\int_0^1 x^n \ln(1-x) dx = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

0587-17

Exercice 118. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} dx$ selon la valeur de l'entier n et calculer cette intégrale quand elle existe.

A038-23

Exercice 119. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{C})$. On suppose que f' est intégrable sur $[0, +\infty[$.

0453-25

Montrer que la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ équivaut à celle de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Exercice 120. Soit f une fonction continue, monotone et intégrable sur $]0, 1[$.

0739-15

Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ converge vers $\int_0^1 f(t) dt$.

Exercice 121. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de l'intégrale

0726-17

$$\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n dt$$

et calculer sa valeur en cas d'existence.

Exercice 122. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$.

A051-23

Trouver un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 123. Étudier la suite de terme général $I_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$.

0675-10

Exercice 124. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+\dots+t^n}$.

A006-25

1. Justifier l'existence de cette intégrale.
2. Pour tout entier $n \geq 3$, justifier les égalités

$$I_{n-1} = \int_0^1 \frac{1-u}{1-u^n} u^{n-3} du \quad \text{et} \quad I_{n-1} = \frac{1}{n^2} \int_0^1 n \frac{1-s^{1/n}}{1-s} s^{-2/n} ds.$$

3. En déduire un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 125. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t+n)} dt$.

A025-25

1. Montrer l'existence de cette intégrale.
2. Calculer u_n .
3. Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 126. 1. Montrer l'existence de l'intégrale $\int_0^1 x^{\sqrt{x}} dx$. Sa valeur est notée I .

A041-23

2. Montrer l'égalité $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)^{n+1}}$.

Exercice 127. Soit $(a, b) \in (]0, +\infty[)^2$. On définit $f_{a,b} : t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+tb}$.

A032-25

1. Justifier que $f_{a,b}$ est intégrable sur $]0, 1[$. On pose alors $F(a, b) = \int_0^1 f_{a,b}(t) dt$.

2. Démontrer l'égalité $F(a, b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a + nb}$.

3. Trouver un équivalent de $F(a, b)$ quand a tend vers $+\infty$ (avec b fixé).

Exercice 128. On pose $J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(\operatorname{ch}(t))^x}$.

A016-25

1. Déterminer l'ensemble de définition de J , noté I .
2. Prouver la continuité de J sur I .
3. Calculer $J(1)$ et $J(2)$.
4. Trouver une relation entre $J(x)$ et $J(x+2)$.
5. Pour tout entier p strictement positif, exprimer $J(2p)$ et $J(2p-1)$ à l'aide de factorielles.
6. Trouver un équivalent de J en 0 .
7. Trouver un équivalent de J en $+\infty$.

Exercice 129. Pour tout x réel, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$.

0631-17

- a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
- b. Trouver une relation entre f et f' et en déduire une expression de f .

Exercice 130. Trouver un équivalent de $\operatorname{Arccos}(u)$ quand u tend vers 1.

1135-17

En déduire que la fonction $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{Arccos}(1-xt)}$ est bien définie puis prouver que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Équations différentielles

Exercice 131. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$.

S002-24

1. Diagonaliser la matrice A .
2. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'' = 5x + y \\ y'' = -7x - 3y \end{cases}$.

Exercice 132. Résoudre l'équation différentielle $x^2 f'(x) + f(x) = 1$ sur $]0, +\infty[$. Trouver les solutions sur $\mathbb{R}$.

0972-16

Exercice 133. Résoudre l'équation différentielle $x^2 y'' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$ à l'aide de la fonction $z : t \mapsto y(e^t)$.

2021-09

Exercice 134. Trouver les solutions développables en série entière de $xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) = 0$.

0473-25

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 135. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $|ab| < 1$. On définit une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par la formule

A087-17

$$f(x, y) = (x + a \sin(y), y + b \sin(x)).$$

Prouver que f est une bijection.

Exercice 136. On définit $f : (x, y) \mapsto xe^y + ye^x$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g : t \mapsto t + \exp(t - 1/t)$ sur $\mathbb{R}^*$.

A063-17

Résoudre l'équation $g(t) = 0$. En déduire les points critiques de f puis étudier ces points critiques.

Exercice 137. On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; -1 < x < y < 1\}$ et $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; -1 \leq x \leq y \leq 1\}$.

1142-17

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction $f : (x, y) \mapsto (y - x)^3 + 6xy$.

Étudier les extremums de f sur D et sur D' .

Exercice 138. On définit une fonction f de $[0, 1]^2$ dans $\mathbb{R}$ en posant

A032-23

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} & \text{si } (x, y) \neq (1, 1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, prouver la majoration $(1-x)(1-y) \leq (1 - \sqrt{xy})^2$.

2. En déduire que f est continue en $(1, 1)$.

3. On pose $x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Montrer que f admet un maximum en (x_0, x_0) .

Exercice 139. On définit la fonction $f : (x, y) \mapsto xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ sur $(]0, +\infty[)^2$.

A043-25

Montrer que f possède un minimum global et déterminer sa valeur.

Exercice 140. On pose $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2(x - y)^2$.

A012-25

1. Trouver les points critiques de f .

2. Étudier les éventuels extremums locaux de f .

Exercice 141. Soit $f \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[, \mathbb{R})$. On définit

A017-23

$$\Phi : (x, y, z) \mapsto f\left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)$$

de $]0, +\infty[^3$ dans $\mathbb{R}$.

Déterminer les choix de f pour lesquels la fonction Φ est harmonique.

Exercice 142. Résoudre l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

S001-23

Exercice 143. Résoudre $\frac{\partial f}{\partial x} - xy \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ à l'aide du changement de variables $(u, v) = (x, y e^{x^2/2})$.

1140-17

Exercice 144. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ bornées telles que

0247-25

$$f = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Exercice 145. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse

0642-17

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \geq 1.$$

Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$.

Exercice 146. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

0396-13

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse que toutes les dérivées partielles de f sont bornées par 1. Montrer la majoration

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n} \|x - y\|.$$

Exercice 147. On note Ω l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

A030-25

On définit la fonction $\gamma : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Soit $\Phi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. On définit

$$f(t) = \Phi(\gamma(t)) \quad \text{et} \quad g_t(s) = \Phi(s\gamma(t)).$$

1. Exprimer les dérivées partielles de Φ en $\gamma(t)$ en fonction de $f'(t)$ et de $g'_t(1)$.

2. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que $N \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Montrer que N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

Probabilités et dénombrement

Exercice 148. Déterminer le nombre d'applications $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $f \circ f = f$.

0613-16

Exercice 149. Pour tout couple (n, p) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on note $E_{n,p}$ le nombre de solutions de l'équation

A030-17

$$\max(|x_1|, \dots, |x_n|) = p,$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$.

1. Calculer $E_{1,1}$ et $E_{2,2}$.

2. On note $S_{n,p}$ le nombre de solutions de l'inéquation $\max(|x_1|, \dots, |x_n|) \leq p$. Exprimer $E_{n,p}$ à l'aide de certains des $S_{n,k}$.

3. Montrer l'égalité $E_{n,1} = 3^n - 1$.

4. Plus généralement, prouver l'égalité $E_{n,p} = (2p+1)^n - (2p-1)^n$ si $p \geq 1$.

5. En déduire qu'il existe une constante C telle que $E_{n,n}$ soit équivalent à $C(2n)^n$.

6. Compter le nombre de solutions du système

$$\max(|x_1|, \dots, |x_n|) = p, \quad \min(|x_1|, \dots, |x_n|) = p - 1.$$

Exercice 150. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On en tire une poignée. Les 2^n poignées possibles sont supposées équiprobables (y compris la poignée vide). On note X la variable aléatoire donnant la somme des numéros tirés.

0655-17

Calculer l'espérance de X .

Exercice 151. On lance deux dés équilibrés à n faces. Les résultats sont modélisés par deux variables aléatoires U_1 et U_2 , supposées indépendantes.

0900-17

On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

a. Déterminer la loi et l'espérance de X .

b. Calculer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2 . En déduire l'espérance de Y .

c. Calculer de même XY et en déduire la covariance de (X, Y) .

Exercice 152. Une urne contient M pommes vertes et N pommes rouges. On les mange une par une et on s'arrête quand on a mangé la dernière pomme rouge. Calculer la probabilité d'avoir mangé toutes les pommes.

A010-17

Exercice 153. 1. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{i+j} = \frac{n^2}{2}$.

P002-15

2. Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$. Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N . On y prélève, avec remise, deux jetons l'un après l'autre. Si n et m sont les numéros sortis, on remplit une deuxième urne avec n boules vertes et m boules rouges. Enfin, on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité que cette boule soit verte ?

3. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 154. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux variables aléatoires X et Y sur cet espace probabilisé, supposée indépendantes et de loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

A024-23

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 2 & Y(\omega) \end{pmatrix}.$$

Calculer la probabilité des événements $A = \{M \text{ est inversible}\}$ et $B = \{M \text{ est diagonalisable}\}$.

Exercice 155. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{\pm 1\}$ dont la loi est donnée par

A028-25

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p.$$

On pose $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$.

1. Calculer l'espérance de Y_n .

2. Déterminer la loi de Y_n .

3. Calculer la covariance de Y_n et Y_m .

Exercice 156. On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de paramètre $p \in]0, 1[$. On appelle *doublet* le fait d'obtenir deux succès à la suite. On pose $q = 1 - p$.

0765-17

L'événement A_n a pour énoncé « On obtient le premier doublet au rang n . ».

L'événement B_n a pour énoncé « On a obtenu au moins un doublet au cours des n premières épreuves. ».

On pose $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

a. Montrer l'égalité $\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=1}^n p_k$.

b. Justifier la formule de récurrence $p_{n+3} = p^2 q \left(1 - \sum_{k=1}^n p_k \right)$.

c. En déduire une relation entre $p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}, p_n$.

d. Résoudre cette relation de récurrence en passant par le calcul des puissances d'une matrice.

Exercice 157. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(p)$. On pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* ; X_n = 1, X_{n+1} = 0\}$. Déterminer la loi de T .

0906-17

Exercice 158. Le nombre X de clients qui entrent dans une boutique une journée donnée suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client achète un article avec une probabilité $p \in]0, 1[$ ou aucun article. Déterminer la loi de Y , le nombre d'articles achetés au cours d'une journée.

0905-17

Exercice 159. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$. Déterminer la loi de $X + Y$.

0916-17

Exercice 160. On fixe un entier $p \geq 2$. On considère une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[[1, p]]$. On pose $M_n = \max(U_1, \dots, U_n)$.

0925-17

Déterminer la loi de M_n et la limite de $\mathbb{E}(M_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 161. Soit N dans $\mathbb{N}^*$. Soit p dans $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

A019-17

On se donne des variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ mutuellement indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p .

1. Pour tout i dans $[[1, N]]$ et tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X_i > n)$.
2. On définit la variable aléatoire $Y_N = \min(X_1, \dots, X_N)$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(Y_N > n)$.
3. Montrer que Y_N possède une espérance et calculer sa valeur.

Exercice 162. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables de Bernoulli. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on fait les hypothèses

A080-17

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = 0,2 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = 0,4.$$

On note $x_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$.

1. Trouver une relation de récurrence entre x_{n+1} et x_n .
2. En déduire une expression de x_n .
3. Donner les valeurs de $\mathbb{E}(X_n)$ et de $\mathbb{V}(X_n)$.

Exercice 163. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements incompatibles. Montrer que $\mathbb{P}(A_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

0908-17

Exercice 164. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$.

A052-25

On définit une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ par $Z = \binom{X+Y}{X}$.

Calculer l'espérance de Z .

Exercice 165. Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $\lambda > 0$.

A029-25

On considère une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Z = k) = p^r \binom{k+r-1}{r-1} q^k.$$

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est définie par

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = \ell) = \frac{1}{-\ln(p)} \frac{q^\ell}{\ell}.$$

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes dont la loi est celle de X . Soit N une variable aléatoire indépendante des X_n de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

On pose enfin $Y = \sum_{k=1}^N X_k$.

1. Calculer les fonctions génératrices de Z et des X_n .
2. Pour tout $t \in [0, 1]$, justifier l'égalité $G_Y(t) = G_N(G_X(t))$.
3. Trouver une valeur de λ telle que Y suive la même loi que Z .

Exercice 166. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$. On pose $Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$.

0909-24

1. Montrer que Y suit une loi géométrique.
2. Vérifier que les variables aléatoires Y et $2Y - X$ sont indépendantes.

Exercice 167. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$, à valeurs réelles. On pose $Y = f(X)$.

0650-17

On suppose que X et Y sont indépendantes. Que dire de Y ?

Exercice 168. On lance deux pièces équilibrées indéfiniment. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement « Les deux pièces ont donné le même nombre de pile et de face au cours des n premiers lancers. ».

1143-17

- a. Déterminer $\mathbb{P}(E_n)$.
- b. Sur les n premiers lancers, quel est le nombre moyen d'indices k pour lesquels l'événement E_k est réalisé ?

Exercice 169. Que dire d'une variable aléatoire indépendante d'elle-même ?

0157-19

Exercice 170. Soit une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre 1.

P006-15

1. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Quelle est la loi de S_n ?
2. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, prouver l'égalité $\mathbb{P}(S_n > n) = \frac{1}{n!} \int_0^n t^n e^{-t} dt$.

Exercice 171. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, +1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

S002-23

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

En particulier, la variable aléatoire S_0 est nulle. On note T le temps de retour en 0 (éventuellement infini), c'est-à-dire

$$T(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}^* ; S_n = 0\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = (T > n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on pose

$$A_k^n = (S_k = 0) \cap \bigcap_{i=k+1}^n (S_i \neq 0).$$

On pose enfin $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n$.

- a. Vérifier que f et g sont bien définies sur $[0, 1[$.
- b. Soient deux entiers k et n tels que $1 \leq k < n$. Montrer que $(S_{k+1} - S_k, \dots, S_n - S_k)$ et $(S_1, \dots, S_{n-k})$ ont la même loi.
- c. En déduire l'égalité $\mathbb{P}(A_k^n) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$ puis simplifier la somme $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$.
- d. Pour tout x dans $[0, 1[$, montrer l'égalité $f(x)g(x) = \frac{1}{1-x}$ et en déduire une expression de $g(x)$.
- e. Pour tout $x \in [0, 1[$, montrer l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n = 1 - \sqrt{1-x^2}$.
- f. En déduire la loi de T . On vérifiera en particulier que T est presque sûrement finie.
- g. Calculer l'espérance de T .

Piste noire

Algèbre de première année

Exercice 172. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

A049-25

Exercice 173. Soient E, F, G des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

1009-25

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. On pose $w = v \circ u$.

Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si

$$u \text{ est injective, } v \text{ est surjective, } F = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(v).$$

Exercice 174. Si M est une matrice à coefficients réels, la notation $M \geq 0$ signifie que tous les coefficients de M sont positifs.

0191-25

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

- (i) la matrice A est inversible et $A^{-1} \geq 0$;
- (ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0)$.

Exercice 175. Soit un entier $n \geq 2$. Soit $\mathcal{L}$ un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse

0047-17

$$\forall O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \quad \forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad \mathcal{L}(O^T S O) = O^T \mathcal{L}(S) O.$$

Montrer que $\mathcal{L}$ est de la forme $S \mapsto \mu S + \lambda \text{tr}(S) I_n$ pour un certain couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Algèbre de deuxième année

Exercice 176. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = -I_n$ et $B^2 = -I_n$.

0428-25

Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 177. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont dans $[1, +\infty[$.

0438-25

Montrer que la matrice AB est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont dans $[1, +\infty[$.

Exercice 178. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

A022-25

Montrer que AB est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 179. Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'exponentielle de M par

A023-25

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}.$$

1. Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la matrice $\exp(xB)$ est orthogonale.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \quad \text{tr}(AU) \leq \text{tr}(A).$$

Montrer que A est symétrique positive.

Indication. Étudier la fonction $f : x \mapsto \text{tr}(A \exp(xB))$.

4. Réciproque.

Exercice 180. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

0224-24

1. On suppose que la matrice $A + iB$ est inversible. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $A + tB$ soit inversible.
2. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 181. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible. Montrer que AB et BA ont le même spectre.

A052-18

Montrer que c'est encore vrai si A n'est pas inversible.

Exercice 182. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse

0380-18

$$\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - a_{k,k}).$$

Montrer que la matrice A est diagonale.

Exercice 183. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'existence et l'unicité de $(B, C) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))^2$ tel que

0433-25

$$A = B - C, \quad BC = 0, \quad CB = 0.$$

Analyse de première année

Exercice 184. Soit $a > 0$.

0447-25

- a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x^n + x^{1/n} = a$ possède une unique solution. On la note x_n .
- b. Trouver la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 185. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

0224-25

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) - f(y) \geq f(x)^2(x - y).$$

Exercice 186. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $g : x \mapsto f(x) + \int_0^x f(t) dt$.

0238-25

On suppose que g admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f possède également une limite et trouver sa valeur.

Exercice 187. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $x_{n+1} - x_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

0377-09

Montrer que l'adhérence de l'ensemble $X = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est un segment.

Exercice 188. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que cette suite est *sous-additive*, c'est-à-dire

0174-15

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad a_{m+n} \leq a_m + a_n,$$

et que la suite $(a_n/n)_{n \geq 1}$ est minorée. Prouver que la suite $(a_n/n)_{n \geq 1}$ est convergente.

Analyse de deuxième année

Exercice 189. Montrer que $\cos(1)$ est irrationnel.

0533-16

Exercice 190. Montrer qu'il existe une fonction ϕ développable en série entière sur un intervalle de la forme $] -r, r[$ telle que

0867-17

$$\forall x \in] -r, r[, \quad x\phi'(x) = x + \phi(x)^2.$$

Exercice 191. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive sommable.

0241-24

Pour tout $x > 0$, montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n^x}{n}$ converge.

Exercice 192. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et que la série de terme général b_n est divergente.

A018-25

On suppose que la suite $(a_n/b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et on note sa limite s .

On pose $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

Montrer que la suite $(A_n/B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers s .

Exercice 193. On définit une suite réelle $(a_n)_{n \geq 1}$ par $a_1 > 0$ et $a_{n+1} = 10^n (a_n)^{n^2}$.

0211-25

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a_1 pour que cette suite converge vers 0.

Autres thèmes

Exercice 194. Calculer le nombre de diviseurs dans $\mathbb{N}^*$ de 1 000 000.

0382-15

Exercice 195. Étant donné 13 nombres réels distincts, montrer qu'il en existe deux parmi eux, notés x et y , tels que

0986-24

$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 2 - \sqrt{3}.$$

Exercice 196. Soit $p \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que p est intégrable sur $[0, +\infty[$.

0474-25

Soit $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $y'' = py$.

a. Montrer que si la fonction y est bornée sur $[0, +\infty[$, alors la fonction y' a une limite nulle en $+\infty$.

b. On admet que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' = py \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

admet exactement une solution.

Montrer que l'équation différentielle $y'' = py$ admet au moins une solution non bornée sur $[0, +\infty[$.

Exercice 197. On considère un *pile ou face* infini équilibré. On note S_n le nombre de séquences (*pile, pile*) lors des n premiers lancers et T le temps d'attente de la première occurrence de cette séquence.

0479-25

a. Calculer l'espérance et la variance de S_n .

b. Déterminer la fonction génératrice de T puis la loi de T .

Exercice 198. On pose $\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. On admet que $\int_{\mathbb{R}} \gamma(x) dx = 1$.

0260-25

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{\pm 1\}$. On pose

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}.$$

a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer la limite de $\mathbb{E}(M_n^k)$ quand n tend vers $+\infty$. On distinguera selon la parité de k .

b. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $\mathbb{E}(P(M_n))$ tend vers $\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x) P(x) dx$ quand n tend vers $+\infty$.