

Préparation aux oraux 2025

Électricité

1. Adaptation d'impédance (G. Arrouart, A. Badre)

On considère un générateur (ou tout autre circuit linéaire) représenté par une force électromotrice $E(t) = E_0 \cos \omega t$ en série avec une résistance interne R_0 . On l'utilise pour alimenter un dipôle d'impédance complexe $Z = R + jX$ avec $R \in \mathbb{R}^+$ et $X \in \mathbb{R}$.

- Exprimer l'intensité $I(t)$ parcourant le dipôle et la tension $U(t)$ à ses bornes. Citer des exemples de dipôles pour lesquels I est en avance sur U , et d'autres pour lesquels I est en retard sur U .
- Exprimer la puissance instantanée $p(t)$ consommée par le dipôle puis la puissance moyenne P_m sur une période.
- On considère que le dipôle est formé de composants réglables. Comment choisir R et X pour que P_m soit maximale ? Exprimer la puissance maximale $P_{m \max}$.
- Le dipôle est formé de l'association en série d'une résistance $R = 100 \Omega$ (fixée et non réglable dans cette question), d'une bobine d'auto-inductance $L = 40 \text{ mH}$ et d'un condensateur de capacité C . La fréquence $f = \omega/(2\pi)$ est fixée à 1 kHz. Comment choisir C pour que la puissance consommée soit maximale ? La calculer pour $R_0 = 50 \Omega$ et $E_0 = 10 \text{ V}$.
- Dans certains cas, l'impédance du générateur possède une partie réactive : elle s'écrit $Z_0 = R_0 + jX_0$. Reprendre dans ce cas les trois premières questions et trouver la nouvelle condition d'adaptation d'impédance.

2. Caractérisation d'une bobine (A. Briand, N. Claudon)

On considère une bobine d'auto-induction formée de $N = 1000$ spires jointives enroulées sur un cylindre. On souhaite par quelques mesures caractériser son comportement électrocinétique, notamment déterminer son auto-inductance L . Pour cela, on la connecte à une résistance et à un GBF fournissant une tension sinusoïdale de fréquence f pour former le montage de la figure 1. Un oscilloscope permet d'observer les tensions $V_1(t)$ et $V_2(t)$.

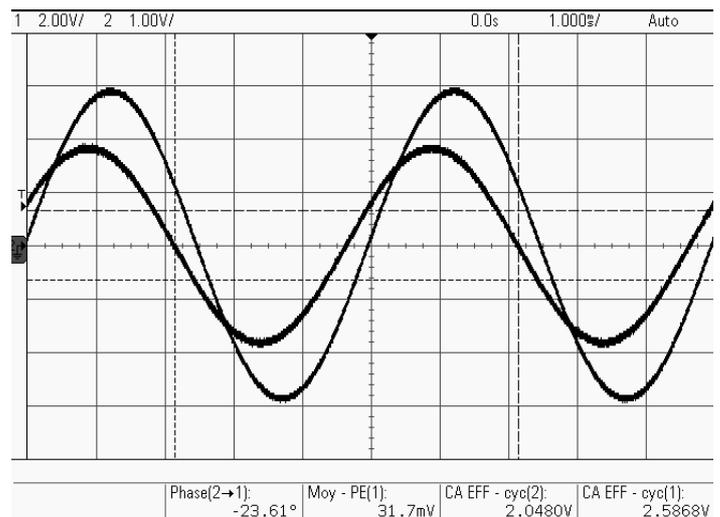
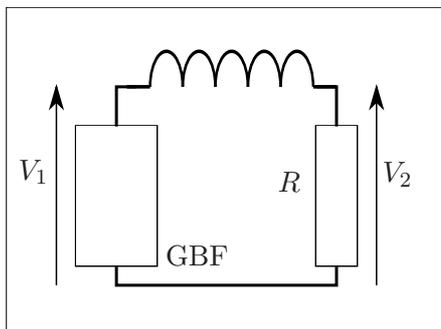


FIGURE 1 – Montage d'étude d'une bobine et exemple de signaux observés

- Pour l'instant, on modélise la bobine par une inductance pure L . Avec $R = 100 \Omega$, on observe les signaux visibles sur la partie droite de la figure (1). Par une analyse de déphasage, déterminer la valeur de L . Le rapport d'amplitude observé est-il en accord avec le résultat obtenu ?
- En réalité, la bobine ne se comporte pas comme un inductance pure. Le fil de cuivre qui la constitue présente une certaine résistivité et la bobine est donc modélisée par l'association en série d'une inductance L et d'une résistance r . Exploiter à nouveau les résultats expérimentaux pour trouver r et améliorer la précision sur L .

3. À partir de fréquences de l'ordre de 10 kHz, la bobine présente un surprenant caractère *capacitif* dont le modèle précédent ne rend pas compte. En effet, les spires de cuivre dont elle est formée sont recouvertes d'une couche isolante et, placées côte à côte les unes des autres, elles se comportent comme de minuscules condensateurs, avec accumulation de charges sur les faces du métal au contact de l'isolant (figure ??). On note C_i la capacité du condensateur formé par deux spires adjacentes. Quelle est la capacité C de la bobine dans son ensemble ?

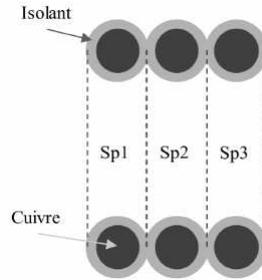


FIGURE 2 – spires successives d'une bobine

4. Le modèle amélioré de la bobine tient compte de cette capacité C . Convient-il de la placer en série ou en parallèle de la branche (L, r) déjà décrite ?
5. En augmentant la fréquence, on constate V_1 et V_2 sont phase pour $f = 18,46$ kHz. En déduire la valeur de C .
6. Pour certaines applications, on modélise de manière approximative la bobine par l'association *en parallèle* d'une résistance r' , d'une inductance L' et d'une capacité C' . Montrer que cela est loisible si $2\pi Lf \gg r$ et donner les expressions de L' , C' et r' en fonction de L , C , r et f .

3. Filtre pour compatibilité électromagnétique (É. Kuagbenu)

Les dispositifs de télécommunication utilisent généralement des ondes hertziennes de fréquence bien déterminée, occupant ainsi une étroite bande du spectre des radiofréquences que l'État les autorisés à couvrir. Pour ne pas provoquer d'interférences électromagnétiques avec d'autres bandes de fréquence, les concepteurs de ces appareils les équipent de filtres ayant pour fonction de réduire l'émission de fréquences indésirables, principalement des harmoniques de la fréquence de travail, et d'assurer ainsi leur « compatibilité électromagnétique » (CEM). Le filtre CEM étudié ici est représenté sur la figure (3). Formé d'une bobine d'auto-inductance L et d'un condensateur de capacité C , il est placé entre une source de tension de fem $E(t) = E_0 \cos \omega t$ et de résistance interne R_0 , et un dipôle d'utilisation \mathcal{A} (généralement une antenne) qu'il alimente sous la tension U .

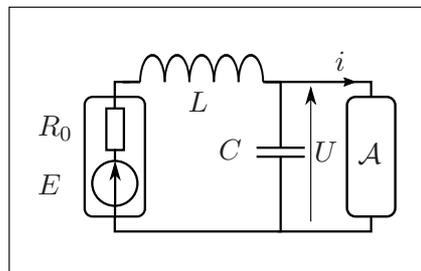


FIGURE 3 – Filtre pour compatibilité électromagnétique

1. Pour l'instant, on envisage le fonctionnement en circuit ouvert ($i = 0$). Quel type de filtrage est opéré entre la source de tension et le dipôle d'utilisation ?
2. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \underline{U}/\underline{E}$. On introduira une pulsation caractéristique ω_0 et un facteur de qualité Q .
3. On envisage l'application à un dispositif radio et on choisit $f_0 = 13,56$ MHz. La source présente une résistance interne $R_0 = 50 \Omega$ et le facteur de qualité Q est fixé à 1. En déduire les valeurs numériques qu'il convient de donner à L et C .

4. Tracer la partie gain du diagramme de Bode.

5. La tension n'est en réalité pas sinusoïdale : elle est fournie par un circuit intégré produisant un signal en créneaux de fréquence $f = f_0$, d'amplitude $E_0 = 5\text{ V}$ et dont le développement en série de Fourier s'écrit

$$E(t) = \frac{E_0}{2} + \frac{2E_0}{\pi} \left(\cos \omega t + \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) + \dots \right) .$$

Exprimer, dans le signal $U(t)$, le rapport d'amplitude de l'harmonique de rang n et du fondamental. Le calculer pour les deux premiers harmoniques.

6. En réalité, le filtre ne fonctionne pas en circuit ouvert mais débite un courant d'intensité i vers le dipôle de charge. Exprimer dans ces conditions \underline{U} en fonction de \underline{E} et \underline{i} . Montrer que le dipôle « voit » une source de tension de fem \underline{E}' et d'impédance de sortie Z' données par

$$\underline{E}' = \underline{H} \underline{E} \quad \text{et} \quad Z' = \frac{R_0 + jL\omega}{1 + (R_m + jL_m\omega - LC\omega^2)} .$$

Cette impédance de sortie joue un rôle déterminant dans l'adaptation d'impédance avec le dipôle d'utilisation et ce thème peut être étudié dans un autre exercice.

7. Calculer numériquement $R' = \Re(Z')$ et $X' = \Im(Z')$ à la fréquence f_0 .

4. Adaptation d'impédance pour une antenne (J. Tur)

Une antenne peut être décrite par la mise en série d'une inductance $L_a = 2,9\ \mu\text{H}$, d'une capacité $C_a = 11\ \text{pF}$ et d'une résistance $R_a = 1,9\ \Omega$. Pour simplifier les raisonnements à venir, on la modélise cependant¹ par un dipôle dans lequel L_a et C_a sont placés *en parallèle* avec une résistance $R_{pa} = 7,15\ \text{k}\Omega$, comme le montre la figure (4). On souhaite l'alimenter par un ensemble de composants électroniques assimilables à une source de tension de fem $E(t) = E_0 \cos \omega t$ et d'impédance de sortie $Z_0 = R_0 + jX_0$ avec $R_0 = 217\ \Omega$ et $X_0 = -58\ \Omega$. Afin de maximiser le transfert de puissance depuis cette source vers l'antenne, on interpose un circuit d'adaptation formé de deux condensateurs C_1 et C_2 (figure 4).

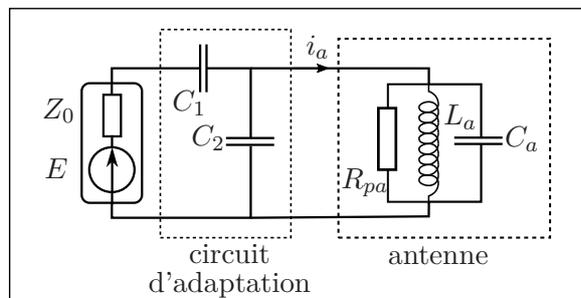


FIGURE 4 – Montage d'adaptation d'impédance pour une antenne

1. Exprimer l'impédance complexe Z du circuit formé de l'antenne, C_1 et C_2 .

2. On démontre² que le transfert de puissance est maximal si $Z = Z_0^*$. Pour une utilisation à la fréquence de 13,56 MHz, calculer les valeurs à donner à C_1 et C_2 .

3. Dans les conditions de la question précédente, la puissance moyenne fournie par la source s'exprime par $\mathcal{P}_{\max} = E_0^2 / (8R_0)$. On revient à la description de l'antenne par le dipôle série formé de R_a , L_a et C_a . Sachant que la puissance \mathcal{P}_{\max} est intégralement dissipée dans la résistance R_a , déterminer la valeur efficace $I_{a\text{eff}}$ de l'intensité i_a du courant circulant dans l'antenne. La comparer numériquement à celle qu'on aurait obtenue en n'intercalant pas C_1 et C_2 et conclure sur le rôle du circuit d'adaptation.

1. L'équivalence des deux descriptions est étudiée dans l'exercice intitulé *caractérisation d'une bobine*.

2. Voir l'exercice intitulé « daptation d'impédance »

5. Une technique de mesure de déphasage (V. Creusot, E. Cristina)

Le montage représenté sur la figure 5 fait intervenir des ALI supposés idéaux et fonctionnant en régime linéaire. Il met aussi en jeu des diodes dont la caractéristique est définie par l'équation $i = i_0 (\exp(v/v_0) - 1)$, les orientations de v et de i étant définies sur la figure. Toutes les résistances présentent la même valeur $R = 100 \text{ k}\Omega$.

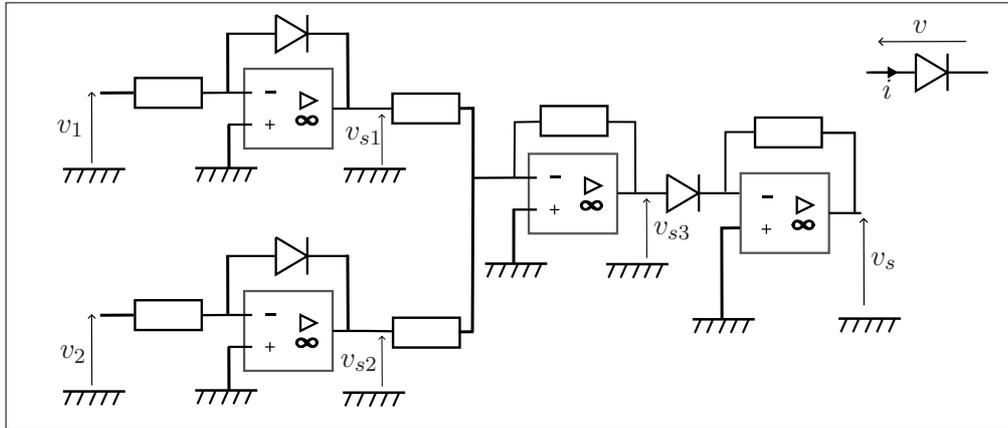


FIGURE 5 – Montage faisant intervenir des ALI et des diodes

1. Exprimer v_{s1} et v_{s2} en fonction de v_1 et v_2 respectivement.
2. Exprimer v_{s3} fonction de v_{s1} et v_{s2} .
3. Trouver enfin l'expression de v_s en fonction de v_1 et v_2 .
4. Commenter et analyser sommairement l'hypothèse selon laquelle les ALI fonctionnent en régime linéaire. Le montage dans son ensemble est-il linéaire ?
5. On prend $v_1 = A \cos \omega t$ et $v_2 = B \cos(\omega t + \varphi)$, A , B et ω étant supposés connus. Quel traitement faut-il appliquer à v_s pour en déduire φ ?

Mécanique

6. Charge ponctuelle en mouvement dans le champ électrostatique d'un fil (A. Daniel, É. De Maïo-Lévy)

Un fil rectiligne infiniment long porte des charges électriques et crée autour de lui un champ électrique de la forme

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r \quad .$$

Dans cette expression, on a utilisé les coordonnées cylindriques et λ représente la charge par unité de longueur portée par le fil.

1. Une charge ponctuelle q se trouve à $t = 0$ à une distance r_0 de l'axe, sa vitesse étant \vec{v}_1 . À quelle condition portant sur \vec{v}_1 la particule aura-t-elle une trajectoire circulaire centrée sur le fil ? Quelle relation doit exister entre les signes de λ et de q pour qu'un tel mouvement soit possible ?
On pose dans la suite $K = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0}$.
2. On étudie maintenant le cas où la vitesse initiale vaut $\vec{v}_0 = \alpha v_1 \vec{u}_\theta$, où α est un nombre réel et v_1 la vitesse à trouver dans la question précédente. Introduire une énergie potentielle dont dérive la force électrique. On la choisira nulle pour $r = r_0$.
3. Justifier que le moment cinétique L_{Oz} de la particule par rapport à l'axe (Oz) se conserve.

4. En déduire que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement et l'exprimer en fonction des données du problème.
5. Justifier que l'énergie mécanique se conserve et l'exprimer en fonction de m, \dot{r}, C, K et r .
6. Introduire une énergie potentielle efficace et l'utiliser pour discuter l'allure du mouvement selon les valeurs de α .
7. Utiliser le code `resout_charge_champ_fil.py` pour étudier numériquement le mouvement en utilisant la fonction `integrate.odeint` pour résoudre numériquement les équations.

7. Piège de Penning (X-ESPCI) (T. Dellestable, J. Dryja)

Un électron se déplace dans un région où règne un champ magnétique constant uniforme $\vec{B} \parallel \vec{u}_z$ et un potentiel électrostatique $V = \frac{V_0}{4d^2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$ avec $V_0 > 0$.

- a) À quelle condition l'électron est-il piégé près de l'origine O des coordonnées ?
- b) Le potentiel électrostatique est produit par des électrons plongés dans l'air assimilable au vide. Pourquoi ne peut-on pas simplement supprimer le champ magnétique et utiliser un potentiel proportionnel à $(-x^2 - y^2 - 2z^2)$?

8. Accélération d'un système de trois masses (D. Dubuisson-Thiry, M. Dumet)

Dans le système de la figure (6), les fils et la poulie présentent une masse négligeable et la poulie est sans frottement. On note m_0, m_1 et m_2 les masses des trois solides et μ leur coefficient de frottement sur le support horizontal. L'ensemble, initialement immobile, est abandonné dans le champ de pesanteur. Trouver l'accélération a avec laquelle le solide de masse m_0 descend et calculer la tension du fil qui relie les deux corps posés sur le support horizontal, en distinguant les différents cas possibles. Reprendre la question dans le cas où la poulie possède une moment d'inertie J .

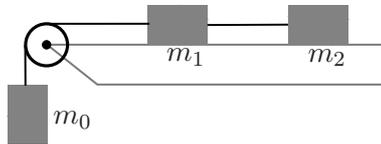


FIGURE 6

9. Dérouleur pour papier essuie-tout (A. Fabri)

Un rouleau de papier essuie-tout, assimilé à un cylindre homogène de masse m et de rayon R , est porté par une tige horizontale de masse négligeable confondue avec son axe de symétrie et autour de laquelle il peut tourner librement (figure 7). Cette tige est elle-même fixée à un mur vertical par deux fils de suspension formant un angle α avec la verticale. Le rouleau s'appuie aussi sur le mur et ce contact est décrit par les lois de Coulomb avec un coefficient de frottement μ .

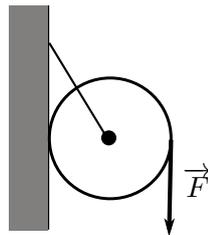


FIGURE 7

1. On exerce une force F dirigée vers le bas sur l'extrémité du rouleau de papier, diamétralement opposée au point de contact contre le mur. On constate que si F reste assez faible, le rouleau reste immobile. Quelle est la valeur F_{max} à ne pas dépasser pour que cela se produise ?

2. On suppose dorénavant $F > F_{max}$. Déterminer l'accélération angulaire du rouleau.

10. Glissement d'une gomme posée sur une règle (A. Fabert)

Une gomme de masse m est posée sur l'extrémité d'une règle de masse M et de longueur 2ℓ . Le contact entre ces deux solides est caractérisé par un coefficient de frottement statique μ_s . Cette règle initialement immobile et horizontale peut pivoter, par une liaison parfaite, autour d'un point fixe O confondu avec son milieu (figure 8). L'ensemble est plongé dans le champ de pesanteur vertical g . Initialement, l'ensemble est au repos puis bascule vers la gauche. On note $\theta(t)$ l'angle dont la règle s'est inclinée à l'instant t .

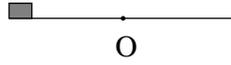


FIGURE 8

On rappelle que le moment d'inertie d'une barre de longueur ℓ par rapport à un axe passant par son centre est $J = \frac{1}{3}m\ell^2$.

1. En exploitant la conservation de l'énergie mécanique du système constitué de la barre et de la gomme, trouver l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de θ , M , m et g .
2. En déduire l'expression de $\ddot{\theta}$.
3. Retrouver le résultat précédent en appliquant le théorème du moment cinétique au même système que dans la première question.
4. Exprimer la réaction normale N et la réaction tangentielle T que la barre exerce sur la gomme.
5. Déterminer de quel angle aura pivoté la règle à l'instant où la gomme commencera à glisser.

11. Équilibre relatif sur un cerceau (T. Farcas, M. Floriot)

Pour traiter cet exercice, l'utilisation d'un ordinateur est nécessaire.

On considère le dispositif représenté sur la figure (9). On note $(\Delta) = (O, \vec{u}_z)$ un axe fixe dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen, avec l'accélération de la pesanteur terrestre $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. Le cercle rigide vertical, de centre C et de rayon a , passant par O , tourne à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$ constante autour de (Δ) , avec $\Omega = \sqrt{g/a}$. On note \mathcal{R}' le référentiel du cercle, et on lui associe le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, tel que $\vec{OC} = a\vec{u}_x$. Au point O est fixé un ressort guidé par le cerceau; le ressort a pour raideur $k = m\Omega^2$ et pour longueur à vide $\ell_0 = \pi a/2$. À son extrémité est fixé un point matériel M , de masse m , qui glisse sans frottement sur le cercle. On repère sa position par l'angle $\alpha = (\vec{u}_x, \vec{u}_r)$ et on introduit la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\alpha, \vec{u}_\beta)$.

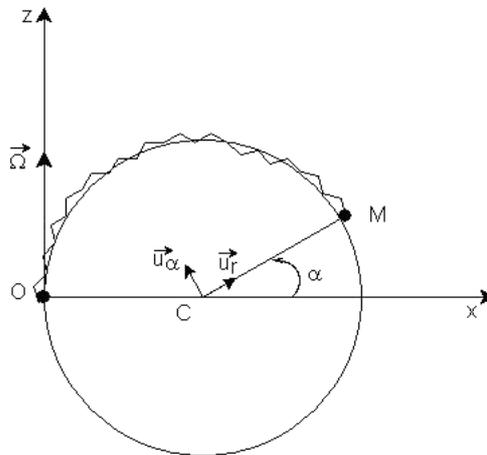


FIGURE 9

1. Dresser le bilan des forces qui s'exercent sur le point (M) dans \mathcal{R}' , et les projeter dans la base cylindrique.

2. Écrire le principe fondamental de la dynamique (PFD), puis en déduire la(les) position(s) d'équilibre relatif du système, c'est à dire celle(s) telle(s) que M occupe une position fixe sur le cerceau. On la(les) notera α_i , avec $i \in \mathbb{N}$, classée(s) par ordre croissant.
3. Analyser la situation d'un point de vue énergétique et introduire une énergie potentielle E_p fonction de α , en prenant pour origine des énergies potentielles le point $\alpha = \pi$.
4. Étudier les variations de la fonction E_p avec α . En déduire la description qualitative des différents mouvements possibles du système. On retrouvera en particulier la(les) position(s) d'équilibre et on étudiera sa(leur) stabilité.
5. Déterminer $\alpha(t)$ si on lâche le système sans vitesse initiale depuis un angle $\alpha_0 + \varepsilon_0$ avec $\varepsilon_0 \ll 1$ rad.
6. Reprendre l'étude de l'équilibre si

$$\Omega^2 = q \frac{g}{a} \quad \text{et} \quad \frac{k}{m} = p \frac{g}{a}$$

puis discuter l'influence de p et de q .

12. Saut d'un astronaute depuis un astéroïde (X-ESPCI) (A. Gallant)

Un astronaute échoué sur un astéroïde de rayon R et de même densité que la terre parvient à s'en échapper en sautant en l'air. Quelle est la valeur maximale de R ?

13. Tunnel gravitationnel (S. Gillet, M. Gravier)

Depuis un point M_0 de la surface de la Terre, de latitude λ , on creuse un puits dans lequel on laisse tomber sans vitesse initiale un point matériel de masse m . Ce puits imaginaire, illimité en profondeur, traverse potentiellement toute la planète et sa forme a été conçue manière à épouser la trajectoire. Ainsi le projectile ne rencontre-t-il jamais d'obstacle dans son mouvement et sa chute libre se poursuit indéfiniment. On étudie son mouvement dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T d'origine O , d'axes dirigés par \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z , en rotation à la vitesse angulaire Ω par rapport au référentiel géocentrique. On modélise la Terre par un ellipsoïde de demi grand axe a (rayon équatorial) et de demi petit axe b (rayon polaire), de masse volumique ρ uniforme. On pose $b = a\sqrt{1 - e^2}$ où e désigne l'excentricité de l'ellipsoïde, le cas particulier $e = 0$ correspondant à une terre sphérique. Valeurs numériques pour la Terre : $e = 0,082$, $a = 6378137$ m. On admet que le champ de gravité dans la Terre s'écrit

$$\vec{g} = -\omega_1^2 (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y) - \omega_2^2 z \vec{u}_z$$

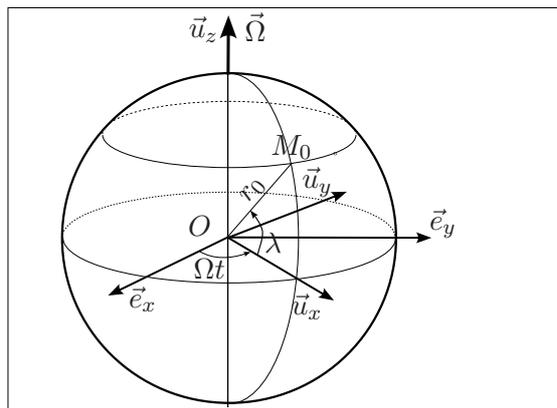
avec

$$\omega_1^2 \simeq \omega^2 (1 - e^2/5) \quad \omega_2^2 \simeq \omega^2 (1 + 2e^2/5) \quad \omega^2 = \frac{4}{3} \pi G \rho \quad .$$

On note

$$r_0 = a \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \lambda}} = OM_0$$

la distance initiale de M_0 au centre de la Terre et λ sa latitude. Ses coordonnées sont $x_0 = r_0 \cos \lambda$, $y_0 = 0$ et $z_0 = r_0 \sin \lambda$.



1. En tenant compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre, écrire les équation du mouvement.
2. Résoudre ces équations et exprimer $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ en fonction de r_0 , λ , Ω , ω_1 , ω_2 et t . Il sera commode de poser $u = x + iy$.
3. Dans cette question et la suivante, on reprend l'étude dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{u}_z)$. Les vecteurs \vec{e}_x et \vec{e}_y pointent vers des étoiles lointaines et se confondent avec \vec{u}_x et \vec{u}_y à $t = 0$. Quelle est la vitesse initiale du projectile dans \mathcal{R}_G ?
4. Étudier le mouvement du projectile dans \mathcal{R}_G . Les coordonnées seront notées $x_G(t)$, $y_G(t)$, $z(t)$.
5. Projeter \vec{e}_x et \vec{e}_y sur (\vec{u}_x, \vec{u}_y) puis retrouver par ce changement de base les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ établies dans la question 2.
6. Déterminer dans \mathcal{R}_T l'équation de la ligne de champ (tenant à la fois compte de la gravité et de l'inertie d'entraînement) passant par M_0 . On utilisera la relation admise

$$\frac{\omega_1^2 - \Omega^2}{\omega_2^2} = 1$$

qui assure que ce champ est perpendiculaire à la surface de la Terre³.

7. Utiliser le code `tunnel_gravitationnel_avec_Coriolis` pour tracer la trajectoire et la ligne de champ. Commenter.

14. Pendule vibrant (X-ESPCI) (É. Henry, P.-É. Huguin)

On considère un pendule simple de masse m et de longueur ℓ dont le point de fixation est soumis à un mouvement vertical d'équation horaire $y(t) = y_0 \cos \omega t$.

1. Établir l'équation satisfaite par l'élongation angulaire θ du pendule dans l'approximation des petits oscillations.
2. On pose $\epsilon = y_0/L$ et on suppose ϵ petit devant 1. En limitant les calculs au premier ordre en ϵ , chercher une solution de la forme $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \epsilon f(t)$ et commenter. Vous devinerez sans mal ce que désigne ω_0 .

15. Pendule élastico-gravitationnel (X-EPSCI) (C. Khelil, N. Lakouanane)

Le dispositif de la figure 10 comporte un ressort de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 , suspendu par une articulation sans frottement à un support fixe, portant une masse m plongée dans le champ de pesanteur. Étudier ses oscillations dans le plan de la figure.

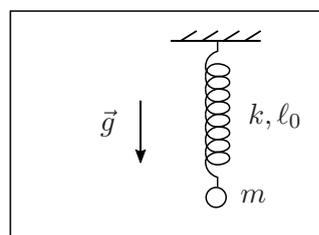


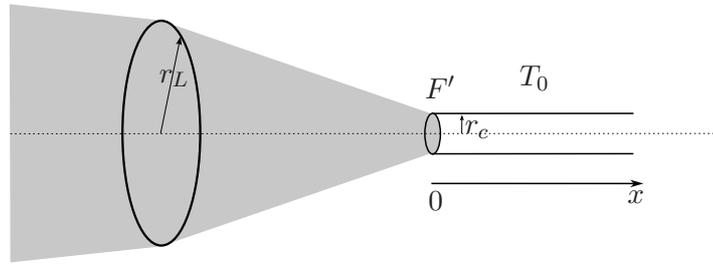
FIGURE 10

Diffusion

16. Inflammation d'un morceau de bois (É. Mihic)

À l'aide d'une lentille convergente de rayon $r_L = 2$ cm et de focal $f' = 20$ cm, on concentre les rayons du Soleil sur l'extrémité d'une tige de bois cylindrique afin de provoquer son inflammation. Cette tige présente un rayon r_c égal à celui du disque sur lequel la lumière se concentre dans le plan focal.

3. cf l'exercice sur la forme hydrostatique de la Terre et l'ellipsoïde de Mac Laurin



1. Déterminer numériquement r_c .
2. Sachant que le rayonnement provenant du Soleil présente une intensité de 1000 W.m^{-2} , déterminer la puissance P_c reçue par l'extrémité de la tige.
3. La tige est supposée semi-infinie et sa température T ne dépendre que de l'abscisse x et de la date t . Initialement à la température $T_0 = 300 \text{ K}$, elle échange de la chaleur avec l'air ambiant avec un coefficient de transfert conducto-convectif $h = 20 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Établir l'équation aux dérivées partielles dont $T(x,t)$ est solution et la mettre sous la forme

$$T(x,t) + \tau \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \ell^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = T_0 \quad .$$

Donner les expressions de ℓ et τ et calculer leurs valeurs numériques.

4. En régime stationnaire, déterminer T en fonction de x , T_0 , ℓ , P_c , λ et r_c .
5. L'échauffement commençant à $t = 0$, on admet que

$$T(0,t) = T_0 + a \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{t}{\tau}} \right)$$

En utilisant le graphe de la figure 11, Déterminer à quel instant le bois s'enflamme.

6. Commenter le résultat et analyser la pertinence du modèle.

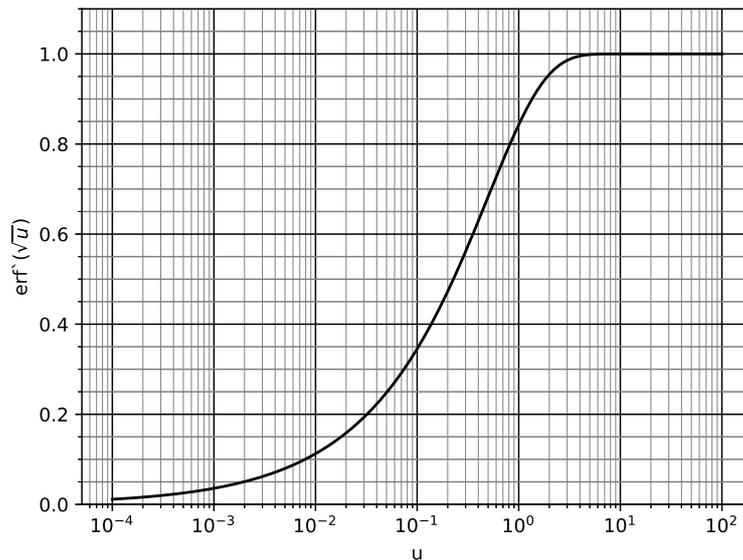


FIGURE 11 – Graphe de la fonction $u \mapsto \operatorname{erf}(\sqrt{u})$

Données numériques

- demi-angle apparent du Soleil $\beta = 4,65 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$
- conductivité thermique du bois $\lambda = 0,2 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$
- masse volumique du bois $\rho_b = 1 \cdot 10^3 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$
- capacité calorifique massique du bois $c_p = 2 \cdot 10^3 \text{ W.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$
- température d'auto-inflammation du bois $T_{\text{ai}} = 600 \text{ K}$

17. Optimisation de l'isolation d'un tuyau (B. Molé)

Un tuyau cylindrique de cuivre, de rayon intérieur $R_1 = 1$ cm et de rayon extérieur R_2 , est utilisé pour faire circuler de l'eau chaude. Sa conductivité thermique est $\lambda = 400 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. On note h_i le coefficient de transfert conducto-convectif avec l'eau, sur la face interne, et $h_e = 4 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ le coefficient de transfert conducto-convectif avec l'air, sur la face externe. On note L la longueur du tuyau.

1. Exprimer la résistance thermique R_{th} caractérisant les échanges entre l'eau et l'air.
2. On souhaite minimiser les déperditions d'énergie vers l'air ambiant plus froid que l'eau. Dans un premier temps, on envisage pour cela de jouer sur l'épaisseur de cuivre, c'est à dire d'augmenter R_2 . Montrer que cette idée n'est pas pertinente.
3. On fixe $R_2 = 1,3$ cm et on entoure le tuyau d'une gaine isolante de conductivité $\lambda' = 0,08 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, occupant l'espace compris entre les rayons R_2 et R_3 . La température est supposée continue en R_2 et le coefficient de transfert à la face externe h_e reste inchangé. Quelle est la nouvelle résistance thermique entre l'eau et l'air ?
4. Analyser la pertinence de l'ajout de la gaine isolante.

18. Diffusion d'un médicament (V. Moniot)

On considère un médicament contenu dans des capsules sphériques de rayon $R = 0,1$ mm possédant une paroi perméable d'épaisseur $e = 1 \mu\text{m}$. Dans une capsule, on suppose que la densité particulaire de molécules actives reste uniforme et on la note $n_a(t)$, avec $n_a(0) = n_0 = 5 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}$.

Le coefficient de diffusion des molécules actives à travers la paroi est $D = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. À travers le corps, c'est $D' = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

1. On se place en régime quasi-stationnaire. En étudiant la densité particulaire de médicament dans la paroi et autour d'une capsule, montrer que le flux de particules sortant d'une capsule vers le corps s'exprime sous la forme

$$\Phi = G n_a$$

et donner l'expression de G en fonction des paramètres du problème.

2. En déduire l'expression du nombre de molécules $N(t)$ actives diffusées vers le corps à l'instant t .
3. Combien de temps faut-il pour que 50% du médicament diffuse vers l'organisme ?
4. Combien de capsules doivent être utilisées pour que le patient absorbe 10 mmol du principe actif ?
5. L'hypothèse du régime quasi stationnaire de diffusion dans la paroi est-elle légitime ?

19. Explosion thermique (A. Pierrat, L. Ragot)

Un matériau de conductivité thermique λ occupe la portion d'un cylindre d'axe (Ox) limitée par les plans d'équations $x = 0$ et $x = 2\ell$. Sur ces deux faces, on maintient une température T_0 constante alors que sa paroi latérale cylindrique est calorifugée. Un dégagement d'énergie thermique se produit au sein de ce milieu avec une puissance volumique p dépendant de la température T selon la loi

$$p = p_0 \exp(\alpha(T - T_0)) \quad \text{avec} \quad p_0 > 0. \quad (1)$$

1. Quelle situation concrète la puissance volumique p peut-elle modéliser ? Comment expliquer la variation de p avec T ?
2. Pour simplifier l'interprétation des résultats ultérieurs, on introduit le paramètre γ défini ci-dessous. Quelle est sa dimension ?

$$\gamma = \frac{p_0 \alpha \ell^2}{\lambda}$$

3. On envisage la possibilité d'existence d'un régime permanent, qui nécessite que toute la puissance thermique produite au sein du matériau soit évacuée. Selon vous, un tel régime existe-t-il lorsque γ est « suffisamment » petit, ou lorsque γ est « suffisamment » grand ?

Dans les questions qui suivent, on détermine la valeur critique de γ limitant le domaine d'existence d'un régime permanent.

4. La température T est supposée ne dépendre que de x . Démontrer l'équation différentielle à laquelle elle obéit en régime variable, puis la simplifier en régime permanent.

5. Quelle symétrie le profil de température présente-t-il? En analysant le signe de $\frac{d^2T}{dx^2}$ et en exploitant les conditions aux bords, représenter l'allure du graphe de $T(x)$. Faire apparaître sur ce graphe la température $T_1 = T(\ell)$.

6. Démontrer l'existence d'une constante C telle que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + \frac{p_0}{\lambda \alpha} \exp[\alpha(T(x) - T_0)] = C$$

puis exprimer C en fonction de α , T_1 et T_0 .

7. On procède au changement de variable $\theta = \alpha(T(x) - T_0)$ et on pose $\theta_1 = \alpha(T_1 - T_0)$. Justifier que

$$\int_0^{\theta(x)} \frac{d\theta'}{\sqrt{e^{\theta_1} - e^{\theta'}}} = \sqrt{2\gamma} \frac{x}{\ell} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \ell.$$

8. On donne

$$\int_0^{\theta_1} \frac{d\theta'}{\sqrt{e^{\theta_1} - e^{\theta'}}} = 2 e^{-\theta_1/2} \operatorname{argch}(e^{\theta_1/2}) \quad .$$

Trouver la relation qui lie l'inconnue θ_1 au paramètre γ .

La suite des questions est à traiter avec un ordinateur en utilisant le code Python `resolution_explosion_thermique_Landau_eleve.py`.

9. Procéder à une résolution graphique et chercher pour quelles valeurs de γ le régime stationnaire peut exister. Deviner ce qui se passe dans le cas contraire?

10. Pour $p_0 = 40000 \text{ W.m}^{-3}$, calculer la température au centre du réacteur en régime stationnaire.

Le code fournit possède des fonctions nécessaires à l'étude du régime variable. Expliquer le codage de la fonction `pdt_vecto`.

11. Utiliser le code pour illustrer le comportement temporel dans les deux régimes possibles (on prendra $p_0 = 40000 \text{ W.m}^{-3}$ et $p_0 = 240000 \text{ W.m}^{-3}$).

20. Un modèle d'effet de serre terrestre (J. Remy, L. Saillant)

On étudie ici un modèle permettant d'estimer la température à la surface de la Terre, supposée constante et uniforme. On s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- L'atmosphère est modélisée par une couche homogène de température T_a non réfléchissante, présentant un coefficient d'absorption α_a dans le visible et $\bar{\alpha}_a$ dans l'infrarouge ;
- Le sol est modélisé par une surface opaque de température T , de coefficient d'absorption α dans le visible et égal à 1 dans l'infrarouge ; il réfléchit le rayonnement qu'il n'absorbe pas ;
- la diffusion du rayonnement solaire par l'atmosphère (nuages, aérosols, gaz, etc.) est traitée de la façon simplifiée suivante : une fraction r du rayonnement solaire φ_s incident est réfléchi vers l'espace avant de pénétrer dans l'atmosphère.

L'atmosphère et le sol sont traités comme des corps gris : par rapport à un corps noir, leur émittance est multipliée par un coefficient d'émissivité e , égal à l'absorbance α du corps pour les mêmes longueurs d'ondes.

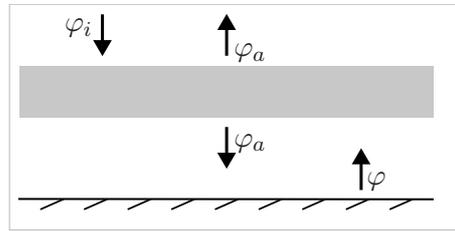
1. Le rayonnement solaire parvenant à la Terre présente une puissance surfacique de 1368 W.m^{-2} dans un plan perpendiculaire aux rayons lumineux. Dans toute la suite, on considère le flux solaire surfacique *moyen* φ_s atteignant un point quelconque de la surface terrestre et on lui attribue la valeur de 342 W.m^{-2} . Pouvez-vous justifier cette valeur ?

2. Quel est le flux surface φ_i pénétrant au sommet de l'atmosphère ?

3. On suppose que ce rayonnement incident est uniquement constitué de lumière visible, alors que ceux émis par l'atmosphère et par le sol sont dans l'infrarouge. Cela vous paraît-il raisonnable ? À quelle propriété fondamentale du rayonnement thermique ces approximations sont-elles liées ?

4. En fonction des grandeurs introduites plus haut, exprimer les coefficients de transmission τ_a et $\bar{\tau}_a$ de l'atmosphère dans le visible et dans l'infrarouge, et le coefficient de réflexion r_s du sol dans le visible.

5. La figure ci-dessous représente le flux incident, le flux φ_a émis par l'atmosphère (vers le haut et vers le bas) et le flux φ émis par le sol. La compléter en y faisant apparaître quatre flux transmis ou réfléchis et indiquer l'expression de chacun.



6. Écrire deux relations traduisant l'équilibre thermique de ce système.

7. Le modèle conduit aux expressions suivantes :

$$T = \left(\varphi_i \frac{2\alpha(1 - \alpha_a) + \alpha_a [1 + (1 - \alpha)(1 - \alpha_a)]}{(2 - \bar{\alpha})\sigma} \right)^{1/4}$$

$$T_a = \left(\varphi_i \frac{\alpha(1 - \alpha_a)\bar{\alpha}_a + \alpha_a [1 + (1 - \alpha)(1 - \alpha_a)]}{\bar{\alpha}_a(2 - \bar{\alpha}_a)\sigma} \right)^{1/4}$$

Sans faire le calcul, expliquer comment on obtient ces expressions.

8. À partir de la figure (12), déterminer r , α , α_a , $\bar{\alpha}_a$.

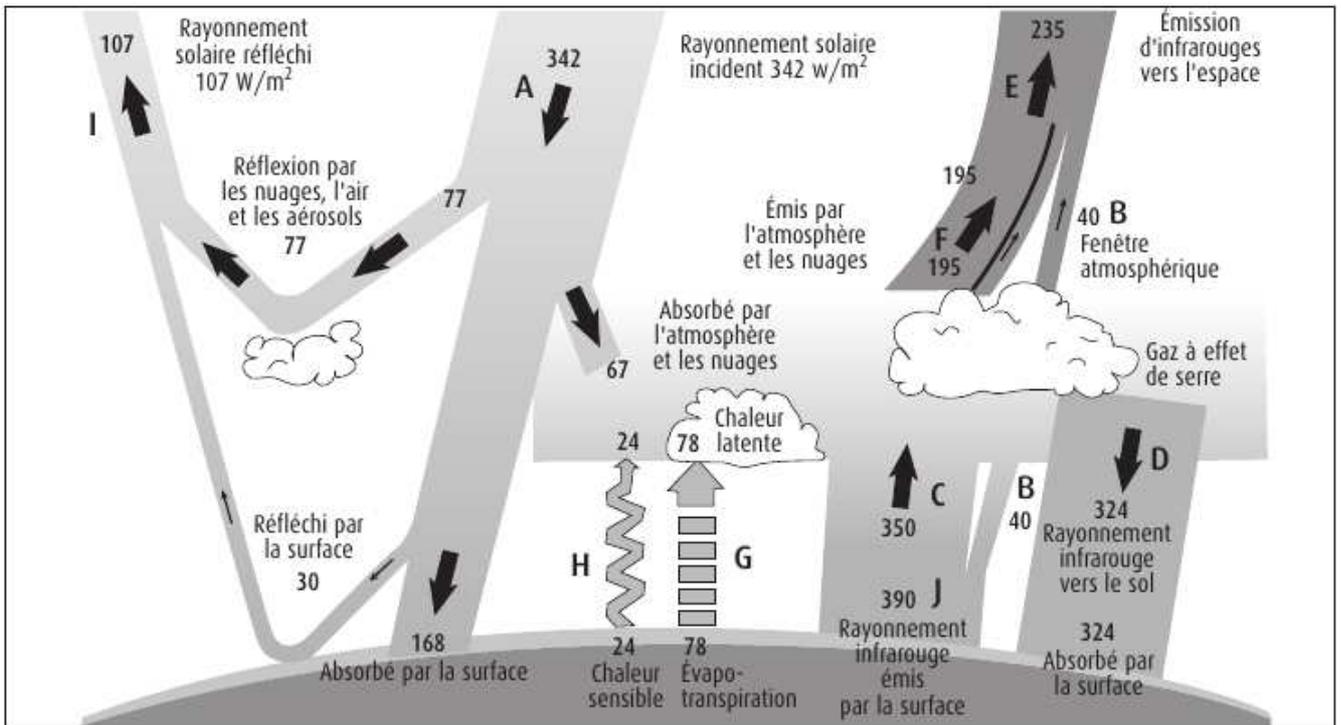


FIGURE 12 – Échanges énergétiques de la Terre en $W.m^{-2}$. A : rayonnement solaire au dessus de l'atmosphère ; C : rayonnement infrarouge absorbé par l'atmosphère ; D : rayonnement émis par l'atmosphère vers la Terre ; F : rayonnement émis par les hautes couches de l'atmosphère vers l'espace.

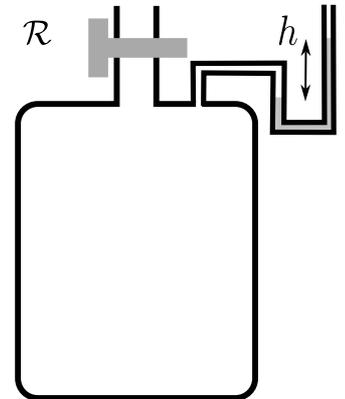
9. Calculer la température de la Terre et celle de l'atmosphère. Commenter.

Données : constante de Stefan $\sigma = 5,67.10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}$, constante de Wien $W = 2898 \mu m.K$.

Thermodynamique

21. Expérience de Clément Désormes (Mines-Ponts) (M. Dumet)

Une enceinte contient un gaz parfait de rapport $\gamma = c_p/c_v$ à la température T_0 ambiante et à la pression P_1 (mesurée par la dénivellation $h_1 = 8,5$ cm) légèrement supérieure à la pression ambiante P_0 . On ouvre le robinet \mathcal{R} pendant environ une seconde et on le referme aussitôt. La pression et la température prennent alors des valeurs (P_2, T_2) . Puis on attend plusieurs minutes jusqu'à ce qu'un nouvel état d'équilibre s'établisse, caractérisé par (P_3, T_3) . La pression P_3 est mesurée par la dénivellation $h_3 = 2,5$ cm.



1. Que valent P_2 et T_3 ?
2. Exprimer T_2 en fonction notamment de T_0 et h_1 .
3. Exprimer γ en fonction de h_1 et h_2 et le calculer. De quel type de gaz s'agit-il ?

22. Échanges entre trois sources (Centrale) (H. Schang)

1. Donner le schéma fonctionnel d'une pompe à chaleur et indiquer le sens réel des échanges. Déterminer l'efficacité énergétique maximale et proposer une application numérique dans un cadre concret.
2. Même question pour un moteur thermique, sans l'application numérique.
3. On dispose de trois solides de même capacité calorifique C aux températures $T_{10} = 300$ K, $T_{20} = 100$ K et $T_{30} = 300$ K. Expliquer comment on peut, sans apport extérieur d'énergie, échauffer au delà de 300 K l'un des trois solides. Déterminer la température maximale que l'on peut atteindre.

23. Pertes thermiques dans une turbine (Y. Souilah)

Une turbine admet de la vapeur d'eau à 1,6 MPa et à 350 °C, et expulse de la vapeur saturée à 30 °C. Le débit massique est de 16 kilogrammes par seconde et la puissance de la turbine de 9000 kW. Déterminer la puissance thermique perdue par la turbine. Données $h_v(1,6 \text{ MPa}, 350^\circ\text{C}) = 3146,0 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$, $h_v(P_{\text{sat}}(30^\circ\text{C}), 30^\circ\text{C}) = 2555,6 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

24. Détendeur pour plongée sous-marine (M. Stratulat)

Pour traiter cet exercice, on utilisera le diagramme (P, h) de l'air fourni en annexe. Les plongeurs sont équipés de bouteilles dans lesquelles l'air est stocké sous une pression de 200 bar à température ambiante $T = 20^\circ\text{C}$. Pour permettre la respiration, on le détend jusqu'à une pression voisine de 1 bar

1. Le passage dans le détendeur est lent, adiabatique, et ne met en jeu aucune hélice, l'air s'écoulant simplement au travers de petits orifices. Déterminer la température de l'air obtenu à l'entrée des voies respiratoires.
2. En réalité, la détente s'effectue en deux étapes analogues à la précédente. Dans un détendeur primaire placé sur la bouteille, le gaz se détend jusqu'à une pression de 10 bar. Puis, circulant dans un tuyau, il se réchauffe jusqu'à la température ambiante à pression constante. Enfin, dans un détendeur secondaire placé près de la bouche du plongeur, il se détend jusqu'à la pression de 1 bar.
 - (a) Quelle est la température de l'air à l'entrée des voies respiratoires ?
 - (b) Quel volume d'air respirable obtient-on à partir d'une bouteille de 13 litres.
 - (c) Quel quantité de chaleur est prélevée dans le milieu ambiant pour un litre d'air respiré ?
 - (d) Quelle est l'entropie créée pour chaque gramme d'air extrait de la bouteille ?

25. Échangeur à contre-courant (J. Tur, G. Arrouart)

Un échangeur thermique est constitué de deux canalisations d'axe (Ox), de longueur L et de même section rectangulaire de côtés a (selon \vec{u}_z) et b (selon \vec{u}_y), séparées par une paroi métallique d'épaisseur $e \ll L$ (figure 13). Dans la conduite supérieure, un liquide entre en $x = 0$ à la température T_{10} et s'écoule vers la droite à la vitesse constante et uniforme v . Dans la conduite inférieure, le même liquide entre en $x = L$ à la température T_{2L} et s'écoule vers la gauche à la même vitesse constante et uniforme. On note $T_1(x)$ et $T_2(x)$ les températures dans chacun des deux fluides à l'abscisse x , supposées uniformes dans chaque section orthogonale à \vec{u}_x . On se place en régime stationnaire. On note c la capacité calorifique massique du fluide, λ sa conductivité thermique et λ_0 celle du métal. On rappelle que le débit massique s'exprime par $D_m = \mu v ab$.

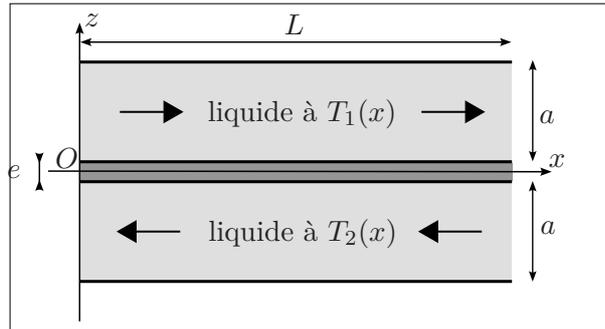


FIGURE 13 – Échangeur à contre-courant

Dans les premières questions, on néglige la conduction thermique dans le fluide, avant d'analyser la pertinence de cette hypothèse à partir de la question 8.

1. Dans le métal, on néglige tout flux thermique dans la direction de \vec{u}_x . Quelle hypothèse de l'énoncé légitime cette approche ?
2. Exprimer le flux thermique $d\Phi_{1 \rightarrow 2}$ traversant un élément de la paroi de longueur dx , du fluide 1 vers le fluide 2.
3. Montrer que $T_1(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dT_1}{dx} = \frac{T_2(x) - T_1(x)}{\delta}$$

et donner l'expression de δ .

4. Trouver l'équation différentielle dont T_2 est solution.
5. Exprimer $T_1(x)$ et $T_2(x)$.
6. Les résultats précédentes conduisent à

$$T_{1L} = T_1(L) = \frac{\delta T_{10} + LT_{2L}}{\delta + L} \quad T_{20} = T_2(0) = \frac{LT_{10} + \delta T_{2L}}{\delta + L} .$$

Commenter l'influence du rapport L/δ sur ces températures de sortie.

7. Exprimer le flux thermique échangé par les fluides dans l'ensemble de l'échangeur, en fonction des températures d'entrée (T_{10}, T_{2L}) et des paramètres du problème. Comment choisir ces paramètres pour maximiser l'échange ?

Jusqu'ici, la conduction thermique au sein du fluide a été négligée. Les questions qui suivent ont pour but d'analyser la pertinence de ce point de vue.

8. Comment faut-il modifier les équations des questions 3 et 4 pour tenir compte de la conduction thermique dans le fluide ? Montrer que T_1 est solution de

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} - \frac{1}{\delta'} \frac{dT_1}{dx} + \frac{1}{\delta \delta'} (T_2 - T_1) = 0$$

et donner l'expression de δ' en fonction de λ , μ , v et c . Trouver aussi l'équation dont T_2 est solution.

9. Dans ces équations, on identifie trois types de termes : ceux liés à la diffusion thermique dans le fluide, ceux liés à la convection et ceux liés à l'échange au travers du métal. On appelle « nombre de Péclet » et on note Pe le quotient

$$Pe = \frac{\text{ordre de grandeur du terme convectif}}{\text{ordre de grandeur du terme diffusif}} .$$

Pour les ordres de grandeur, on admet que toutes les variations de température ont le même ordre de grandeur \tilde{T} et se font à l'échelle L . Exprimer le nombre de Péclet en fonction de L et d'une autre longueur.

10. On définit maintenant⁴

$$N = \frac{\text{ordre de grandeur du terme d'échange}}{\text{ordre de grandeur du terme diffusif}} .$$

L'exprimer sous la forme $N = L/\delta''$ en précisant l'expression de δ'' en fonction de λ , e , a et λ_0 .

11. À quelles conditions est-il légitime de négliger la diffusion dans le fluide ?

12. Montrer que la conception de l'échangeur nécessite un compromis sur le choix de la vitesse.

Ce problème peut donner à lieu à divers prolongements, tels que

- résoudre exactement le cas où $v = 0$;
- résoudre numériquement par la méthode des différences finies le système d'équation de la question 8 ;
- résoudre exactement le système linéaire de la question 8.

26. Bilans dans un échangeur à contre-courant (A. Badr)

On considère l'échangeur thermique représenté sur la figure (14). Les états d'entrée et de sortie sont caractérisés par les températures T_1 , T_2 , T_3 et T_4 , avec $T_3 \neq T_1$. L'air en écoulement est assimilé à un gaz parfait diatomique de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ et s'écoule à pression atmosphérique. L'installation fonctionne en régime stationnaire avec un débit massique D_m identique dans les deux canalisations. Des échanges thermiques sont susceptibles de se produire entre les deux écoulements (c'est le but du dispositif), par contre l'échangeur dans son ensemble est parfaitement calorifugé.

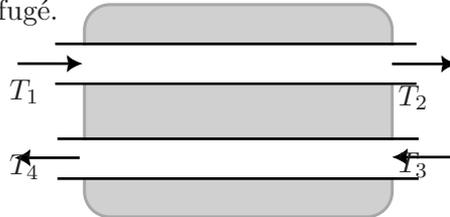


FIGURE 14 – Échangeur à contre-courant

1. Dans cette question et la suivante, on suppose le fonctionnement réversible. En utilisant deux bilans thermodynamiques, établir deux relations entre les températures T_1 , T_2 , T_3 et T_4 .
2. On suppose T_1 et T_3 connues avec $T_1 > T_3$. Trouver l'ensemble des solutions pour T_2 et T_4 .
3. Pour chacune des solutions obtenues, expliquer par des phrases claires pourquoi elles sont effectivement compatibles avec l'hypothèse de réversibilité. Dans le cas où $T_2 \neq T_1$, on tracera le graphe donnant les variations de température en fonction de x , abscisse comptée de gauche à droite dans chacune des canalisations, en admettant que ce profil est linéaire.
4. Une étude détaillée de l'échangeur dans le cas général (pas nécessairement réversible) montre que

$$T_1 - T_4 = T_2 - T_3 = \frac{T_1 - T_3}{1 + \frac{gL}{D_m c_p}}$$

où g est la conductance linéique de l'espace séparant les deux flux et L la longueur des canalisations. Dans quels cas limites la réversibilité est-elle atteinte ?

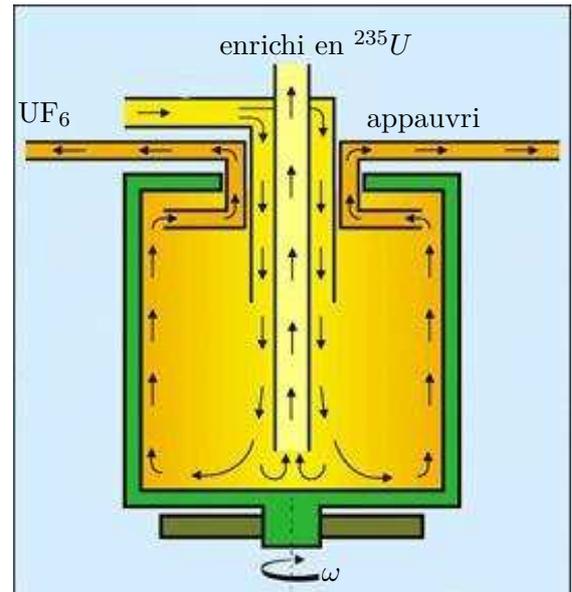
4. Je ne connais pas le nom de ce nombre

5. Dans un échangeur réel, on a mesuré $T_1 = 350$ K, $T_2 = 290$ K, $T_3 = 280$ K et $T_4 = 340$ K. Calculer l'entropie massique créée.
6. Suite à un incident, l'échangeur n'est plus parfaitement calorifugé et il cède de la chaleur au milieu ambiant, considéré comme un thermostat de température $T_0 = 293$ K. On mesure alors $T_4 = 330$ K, les autres températures étant inchangées. Calculer les pertes thermiques massiques.

Mécanique des fluides

27. Séparation d'isotopes par centrifugation (A. Briand)

L'uranium naturel se présente comme un mélange des deux isotopes ^{238}U et ^{235}U avec des fractions massiques de 0,993 et 0,007. Seul l'uranium 235 est fissile et il est nécessaire d'en augmenter la proportion, jusqu'à quelques pourcent pour les applications civiles et quelques dizaines de pourcent pour les armes nucléaires. La méthode d'enrichissement la plus utilisée aujourd'hui est la centrifugation. Des vapeurs d'hexafluorure d'uranium UF_6 sont introduites dans un cylindre en rotation autour de son axe de symétrie. Les molécules les plus lourdes s'accumulent près des parois et les molécules les plus légères près de l'axe. De plus, le gaz circule dans la centrifugeuse, permettant l'aspiration de la partie enrichie en ^{235}U au bas du cylindre et de celle appauvrie en haut. Comme l'enrichissement obtenu ainsi est très faible, il est nécessaire d'utiliser les milliers de centrifugeuses en cascade afin d'atteindre les pourcentages souhaités.



Pour estimer l'efficacité du procédé, on adopte un modèle très simplifié en supposant que le gaz se trouve en équilibre dans le référentiel de la centrifugeuse, en rotation uniforme de vitesse angulaire ω par rapport au référentiel du laboratoire.

- Pour l'instant on suppose qu'un unique gaz parfait de masse molaire M se trouve dans la centrifugeuse. Déterminer le champ de pression $p(r)$ et la densité particulaire $n(r)$, r désignant la coordonnée cylindrique usuelle. On notera p_0 et n_0 leurs valeurs sur l'axe, et T la température, supposée uniforme.
- On admet que l'expression obtenue pour $n(r)$ s'applique séparément à $^{238}\text{UF}_6$ (densité particulaire n_1) et $^{235}\text{UF}_6$ (densité particulaire n_2), avec bien sûr des valeurs de n_0 distinctes. Exprimer le rapport d'enrichissement

$$q = \frac{n_2(0)/n_1(0)}{n_2(r)/n_1(r)}$$

en fonction de R , T , r , ω et des masses molaires M_1 et M_2 .

- Application numérique : $r = 15$ cm, $\omega = 50000$ tour/min, $R = 8,314$, $T = 300$ K, $M_1 - M_2 = 3,0$ g.mol $^{-1}$. Calculer q . En admettant que q s'identifie au rapport des compositions isotopiques de deux centrifugeuses successives, combien d'étapes faudrait-il pour atteindre un taux d'uranium 235 de 20% ? Expliquer pourquoi plusieurs milliers de centrifugeuses en cascade sont en réalité nécessaires.

28. Écoulement de Couette de couches fluides (N. Claudon, V. Creusot)

Deux couches fluides de même épaisseur h , de viscosités dynamiques η_1 et η_2 , occupent l'espace compris entre deux parois solides (figure 15). L'une est immobile et l'autre se translate à la vitesse $U \vec{u}_x$. Déterminer le profil de vitesse, supposé de la forme $\vec{v} = v(y) \vec{u}_x$, puis exprimer la force par unité de surface s'exerçant sur la paroi supérieure. On ne tiendra pas compte de l'effet de la pesanteur.

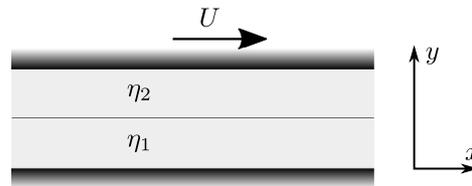


FIGURE 15

29. Écoulement le long d'un fil (E. Cristina, A. Daniel)

Un fluide newtonien de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν s'écoule le long d'un fil cylindrique vertical de rayon a (figure 16). Après une zone de transition, on observe un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = v(r)\vec{u}_z$ en coordonnées cylindriques. On néglige les frottements exercés par l'air. Déterminer le champ de vitesse puis exprimer sous forme intégrale le débit de l'écoulement.

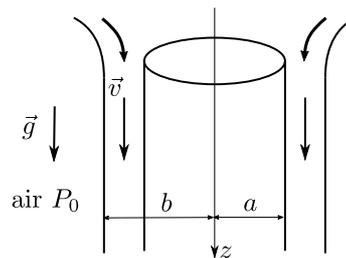


FIGURE 16

30. Écoulement magnétohydrodynamique entre deux plans (É. De Maïo-Lévy, M. Stratulat)

Un fluide conducteur neutre, incompressible, de masse volumique ρ , de conductivité électrique γ et de viscosité dynamique η occupe l'espace limité par deux plaques immobiles d'équations $z = -a/2$ et $z = a/2$ dans un repère orthonormé direct. Cette région est plongée dans un champ magnétique constant et uniforme $B_0\vec{u}_z$. On ne considère pas l'effet de la gravité. On rappelle qu'en présence d'un champ magnétique, la loi d'Ohm locale doit être modifiée en prenant en compte le produit vectoriel de la vitesse par ce champ.

1. On applique un champ électrique électrique $E_0\vec{u}_y$. Expliquer pourquoi le fluide se met en mouvement et dire dans quelle direction.
2. Le fluide n'est soumis à aucun gradient de pression selon \vec{u}_x . En régime permanent, rechercher un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = v(z)\vec{u}_x$. On posera $\alpha = B_0\sqrt{\frac{\gamma}{\eta}}$ et $V_0 = \frac{E_0}{B_0}$.
3. On donne $a = 1$ cm. Le fluide est du mercure caractérisé par $\gamma = 10,2 \cdot 10^5$ S.m⁻¹, $\eta = 1,55 \cdot 10^{-3}$ Pa.s. Représenter les variations de v avec z pour $B_0 = 1$ T, $B_0 = 0,1$ T et $B_0 = 0,01$ T.
4. À cause des courants volumiques régnant dans le fluide, le champ magnétique ne se réduit pas à \vec{B}_0 , mais présente un terme additionnel \vec{B}_1 . Déterminer la direction de \vec{B}_1 et montrer que sa prise en compte n'invalide pas le champ de vitesse trouvé précédemment. Exprimer ce champ magnétique \vec{B}_1 .

31. Force de traînée sur un cylindre aplati (T. Dellestable, Y. Souilah)

Un fluide de masse volumique ρ possédant une vitesse U s'écoule en direction d'un cylindre cylindre aplati entièrement immergé. En aval, on observe un sillage de largeur $2L$ qu'on modélise par un profil vitesse en forme de lettre V comme la montre la figure (17). L'écoulement est invariant par translation perpendiculairement au plan de la figure et la pression supposée identique sur les sections où les profils de vitesse ont été représentés. Exprimer la force s'exerçant sur un tronçon de longueur b du cylindre.

32. Plongeon d'une balle (J. Dryja, H. Schang)

Une balle de rayon $a = 2,5$ cm et de densité $\delta = 0,5$ plonge verticalement dans l'eau avec une vitesse $v_0 = 10$ m.s⁻¹. Elle s'y enfonce, puis remonte vers la surface avant d'en émerger. En supposant le coefficient

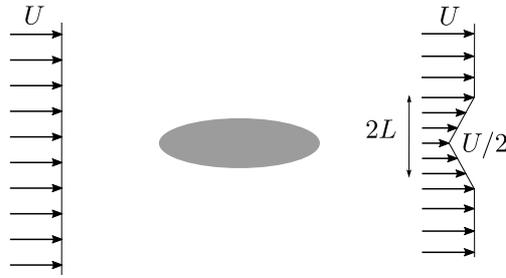


FIGURE 17 – Écoulement autour d'un cylindre aplati perpendiculaire à la figure

de traînée constant égal à 0,47, trouver jusqu'à quelle profondeur h elle descend sous la surface horizontale du liquide.

33. Démarrage d'une citerne cylindrique (X-ESPCI) (D. Dubuisson-Thiéry)

Une citerne cylindrique de masse M et de section S est placée sur une surface glissante comme de la glace. On y perce un trou de section s . Déterminer l'accélération initiale de la citerne.

34. Force dans un étranglement (M. Dumet, L. Saillant)

Dans le schéma de la figure (18), un écoulement d'eau parcourt une canalisation dont le diamètre se réduit de $D_1 = 8$ cm à $D_2 = 5$ cm. On donne $V_1 = 5$ m.s⁻¹, $h = 58$ cm, $p_2 = 1,01$ bar (pression atmosphérique). Calculer la force s'exerçant sur le collier qui maintient la canalisation en place. La pesanteur n'est pas prise en compte et la masse volumique du mercure est $\rho_m = 13,6 \cdot 10^3$ kg.m⁻³.

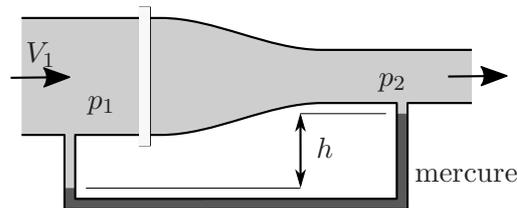


FIGURE 18

35. Propulsion d'un véhicule miniature (A. Fabri, L. Ragot)

La véhicule réduit de la figure (19) pèse 2 kg. Initialement immobile, il est poussé par un jet de diamètre 1 cm dans lequel l'eau présente une vitesse de 75 m.s⁻¹. Déterminer sa vitesse lorsqu'il aura parcouru un mètre. On négligera les frottements de l'air, la résistance au roulement et les pertes visqueuses dans le liquide.

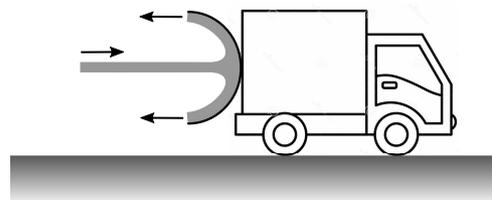
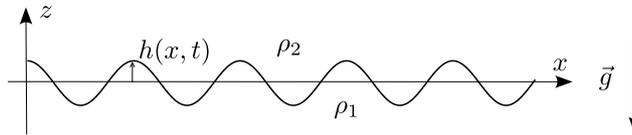


FIGURE 19

36. Onde interne dans un fluide (X-ESPCI) (M. Gravier)

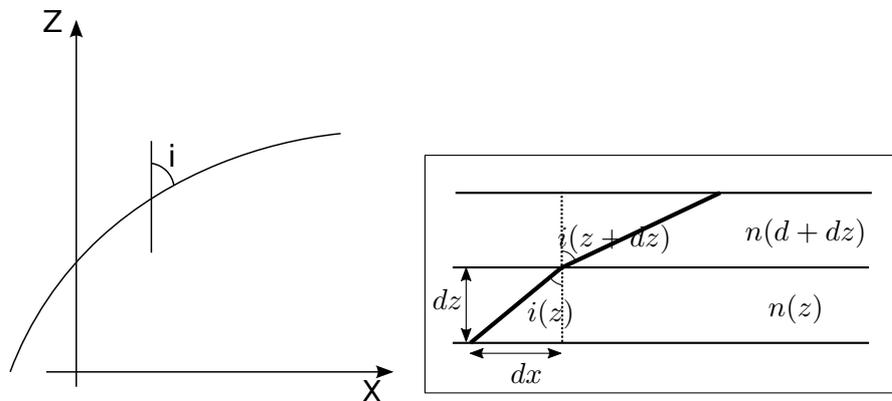
On considère deux fluides de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 séparés par une interface sujette à une onde de la forme $h = h_0 e^{i(\omega t - kx)}$. Les fluides sont supposés parfaits, incompressibles et l'écoulement irrotationnel. Trouver la relation de dispersion.



Optique

37. Mirage (A. Fabert, J. Remy)

Les variations de température dans l'atmosphère entraînent des variations de l'indice optique avec l'altitude. On les modélise par une loi de la forme $n(z) = n_0\sqrt{1 + kz}$ où n_0 et k sont deux constantes. Dans un tel milieu, un rayon lumineux parcourt une courbe pour laquelle on note $i(z)$ l'angle local formé par la tangente avec la verticale à la cote z . On note i_0 sa valeur en $z = 0$. Pour étudier ce phénomène, on adopte le modèle du milieu stratifié qui consiste à le décomposer en couches d'épaisseur infinitésimale dz , d'indice uniforme $n(z)$, dans lesquelles la lumière se propage en subissant une déviation lors de son passage d'une couche à l'autre.



1. Trouver un invariant de propagation, c'est à dire une combinaison des fonction $n(z)$ et $i(z)$ présentant une valeur indépendante de z . On exprimera cette constante en fonction de n_0 et i_0 .
2. En déduire l'équation différentielle suivante, définissant la courbe suivie par le rayon :

$$\frac{dn^2}{dz} = 2n_0^2 \sin^2 i_0 \frac{d^2z}{dx^2}$$

3. Trouver l'équation cartésienne $z = f(x)$ du rayon.
4. On considère tout d'abord le cas d'un sol surchauffé par le soleil. Selon vous, quel est dans ce cas le signe de k ? Représenter schématiquement la trajectoire et faire le lien avec le phénomène de mirage.
5. Dans quel genre de situation le signe de k serait-il changé? Quel genre de mirage verrait-on alors?

38. Etude d'un viseur (T. Farcas, A. Pierrat)

Un viseur est constitué d'une lentille L_1 de distance focale $f'_1 = 10$ cm jouant le rôle d'objectif et d'un oculaire assimilé à une lentille L_2 de focale $f'_2 = 2$ cm. La distance D entre L_1 et L_2 peut être réglée par l'utilisateur.

1. On règle le viseur pour observer sans accommoder un objet AB situé à 20 cm en avant de l'objectif. Quelle est alors la valeur de D ? On conserve cette valeur dans la suite.
2. L'observateur voit l'image de AB sous un angle α' . Calculer en dioptries la puissance du viseur, c'est à dire le rapport $P = \frac{\alpha'}{AB}$.
3. En accommodant, un observateur qui n'est ni myope ni hypermétrope peut observer des objets jusqu'à une distance de 20 cm. Il place son œil dans le plan de l'image de L_1 par L_2 . Déterminer dans quelle partie de l'espace peut se trouver un objet AB que l'observateur voit nettement.

39. Réseau zoné (M. Floriot)

On considère un réseau plan formé de très fines fentes circulaires concentriques de centre 0, pratiquées dans un écran opaque confondue avec le plan d'équation ($x = 0$). Le rayon de la n^{e} fente est $r_n = a\sqrt{n}$, où a est une constante positive. Ce réseau est éclairé par une onde plane parallèle à son axe de révolution (Ox). On observe alors sur cet axe une série de points brillants très intenses entre lesquels presque aucune lumière n'est détectable. Interpréter ce phénomène et déterminer les abscisses des points brillants.

40. Jet de gaz dans un interféromètre de Michelson (Mines-Ponts) (A. Gallant, B. Molé)

On observe en lumière blanche les franges d'interférences produites par un interféromètre de Michelson monté en coin d'air, puis on émet un jet de gaz devant l'un des miroirs au moyen d'une bombe de dépoussiérant. La figure d'interférences prend alors l'allure visible sur la figure ci-dessous. Sachant que les miroirs ont un diamètre de 4 cm, estimer la différence d'indice entre l'air et le gaz.



41. Courant d'air dans un interféromètre de Michelson (Centrale-Supélec) (S. Gilet)

Un interféromètre de Michelson monté en coin est éclairé par un faisceau monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 546 \text{ nm}$. Un jet d'air traverse l'un de ses bras sur une épaisseur $L = 5 \text{ cm}$ (mesurée dans la direction des rayons lumineux). L'écran d'observation prend alors l'allure représentée sur la figure (20). On précise que sur cette figure, l'ordre croît de gauche à droite et que le jet d'air passe devant le miroir qui est le plus éloigné de la séparatrice.

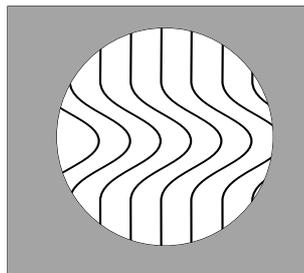


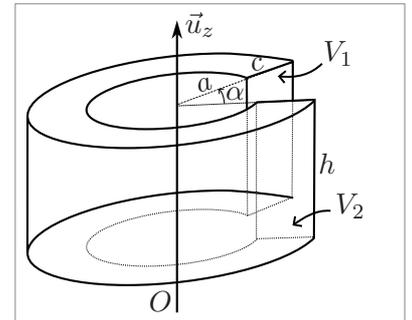
FIGURE 20 – Allure de franges en présence d'un courant d'air

1. Déterminer la variation d'indice provoquée par le courant d'air. On remarquera qu'au point de déformation maximale, chaque frange atteint l'abscisse qu'occuperait une autre frange en l'absence de déformation.
2. On assimile l'air à un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ et on suppose son écoulement parfait. Selon la loi de Gladstone, son indice optique n dépend de sa masse volumique ρ par $n - 1 = K\rho$ avec $K = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$. Déterminer la vitesse du courant d'air. On pourra admettre que la relation de Bernoulli est presque applicable et introduire la compressibilité isentropique de l'air (ou la vitesse du son c).

Électromagnétisme

42. Résistance d'un conducteur torique (É. Henry)

Un conducteur ohmique de conductivité γ présente la forme d'un tore engendré par la rotation d'un rectangle de côtés (c, h) autour de la droite (O, \vec{u}_z) . Les cercles intérieurs ont pour rayon a et les cercles extérieurs, $a + c$. Une ouverture d'angle dièdre α a été pratiquée dans ce tore et les deux faces rectangulaires au contact de l'air sont placées à des potentiels uniformes respectifs V_1 ou V_2 . Un courant électrique d'intensité I circule de l'une à l'autre selon \vec{u}_θ . Déterminer la résistance électrique de ce dipôle. On rappelle que ce concept est défini en régime statique, les grandeurs électriques ne dépendant pas du temps. On remarquera que le courant électrique n'est pas uniformément réparti et on pourra recourir à un formulaire d'analyse vectorielle.



43. Pénétration du champ magnétique dans un métal (P.-É. Huguin, C. Khelil)

On considère un métal semi-infini, de conductivité γ , occupant le demi-espace défini par $x \geq 0$. À partir de l'instant $t = 0$, on impose brutalement à sa surface un champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_y$ constant. On analyse l'évolution du champ qui s'ensuit à l'intérieur du métal. Il est nul pour $t \leq 0$, et de la forme $\vec{B} = B(x, t) \vec{u}_y$ pour $t \geq 0$.

1. Expliquer sans calcul pourquoi des courants électriques se mettent à circuler dans le métal.
2. On néglige le courant de déplacement. Montrer que le champ magnétique obéit à une équation de diffusion et exprimer la diffusivité D en fonction de μ_0 et γ .
3. La résolution de cette équation doit permettre d'établir une relation entre les 5 grandeurs B , B_0 , x , D et t . Quel nombre k de dimensions *indépendantes* ces cinq grandeurs font-elles intervenir ?
4. À partir de 5 grandeurs énumérées ci-dessus, former $(n - k)$ nombres sans dimensions.
5. D'après le théorème de Vashy-Buckingham, il existe une fonction f telle que

$$\frac{B(x, t)}{B_0} = f\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) .$$

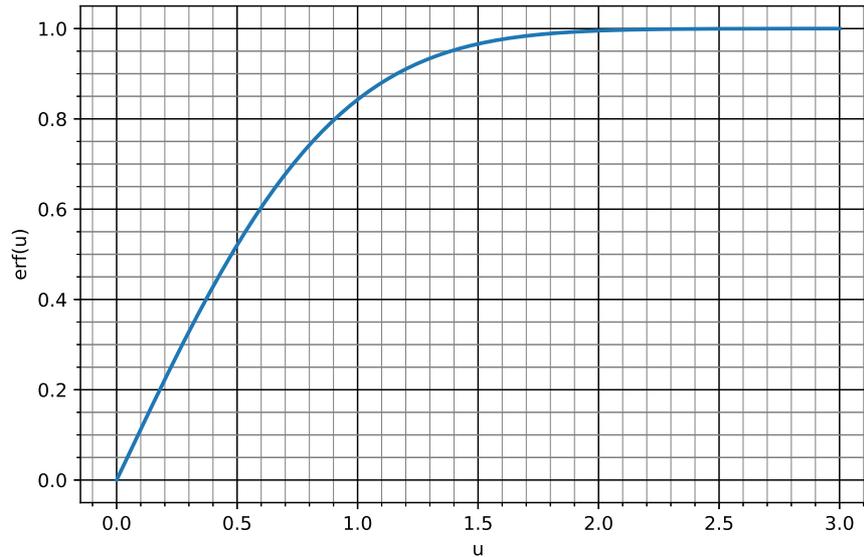
En utilisant ce changement de variables, montrer que

$$B(x, t) = B_0 \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right) .$$

6. Représenter les variations spatiales de B à divers instants. Commenter en lien avec une loi qualitative régissant les phénomènes d'induction.
7. Dans le cuivre de conductivité $\gamma = 6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$, trouver au bout de combien de temps le champ vaut $0,9B_0$ à une profondeur de 1 cm.
8. Déterminer la densité volumique de courant $\vec{j}(x, t)$. Représenter ses variations spatiales à différentes dates.
9. On considère la portion de plan définie par $(x \geq 0, z = 0, y \in [0, \ell])$ (il s'agit d'un rectangle dont un côté présente la longueur ℓ et dont l'autre côté tend vers l'infini). Exprimer l'intensité $I(t)$ qui la traverse à un instant $t > 0$. Que remarque-t-on ?

Annexe mathématique

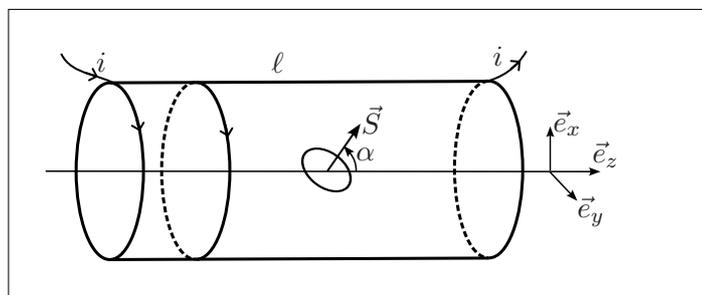
$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-q^2} dq$$



44. Rotation d'un aimant dans un solénoïde (É. Kuagbenu)

On considère un solénoïde de longueur ℓ , de rayon $a \ll \ell$, possédant n spires par unité de longueur, dont les extrémités ont été reliées par un fil de manière à former un circuit fermé de résistance R (ce fil n'est pas représenté sur la figure). On note i l'intensité qui le parcourt.

1. Une petite spire d'aire S est introduite dans le solénoïde et orientée de telle manière que sa normale forme un angle α avec l'axe de révolution \vec{e}_z du solénoïde. Exprimer l'inductance propre du solénoïde et le coefficient de mutuelle induction M entre les deux circuits.



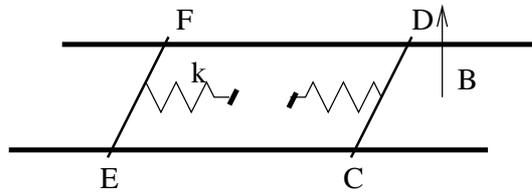
2. La spire précédente est retirée. On la remplace par un aimant permanent de moment dipolaire magnétique \vec{M} orienté de la même manière que S dans la situation précédente. Un opérateur l'entraîne en rotation à la vitesse angulaire constante ω autour de \vec{e}_y de manière que le vecteur \vec{M} tourne dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_z) . L'angle (\vec{e}_z, \vec{M}) s'identifie donc à $\alpha = \omega t$. Déterminer, en régime sinusoïdal forcé, l'intensité $i(t)$ qui circule dans le solénoïde. On posera $A = \mu_0 n \mathcal{M} / L$ et $\tau = L / R$. Quelle est la dimension de A ?

3. Exprimer le couple $\vec{\Gamma}_{\text{op}}$ que l'opérateur exerce pour maintenir constante la vitesse de rotation de l'aimant, puis sa valeur moyenne dans le temps.

4. Analyser méticuleusement la situation d'un point de vue énergétique.

45. Oscillations de 2 barres dans un champ magnétique (N. Lakouanane, É. Mihic)

Les barres CD et EF ont même masse m , même résistance $R/2$ et sont reliées à des points fixes par deux ressorts identiques de raideur k et de longueur au repos l_0 . Elles peuvent se déplacer sans frottement sur les rails horizontaux qui leur sont perpendiculaires. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique constant uniforme vertical B . On note a la distance entre les rails. Étudier les mouvements de ce système.



46. Condensateur cylindrique (G. Arouart)

Un condensateur est formé de deux cylindres coaxiaux en métal de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, de longueur ℓ et séparés l'un de l'autre par de l'air. Les cylindres intérieur et extérieur portent respectivement les charges électriques Q et $-Q$. En négligeant tout effet de bord, trouver l'expression du champ électrique entre les deux cylindres puis en déduire la capacité de ce condensateur.

47. Champ magnétique dans un câble coaxial (A. Badre)

Un câble coaxial est constitué par un conducteur cylindrique plein de rayon a , appelé « âme », entouré par un conducteur externe occupant l'espace compris entre les cylindres de rayons b et c , appelé « gaine » (avec $a < b < c$). Un courant d'intensité I circule dans l'âme parallèlement à l'axe de révolution du cylindre. Dans la gaine, un courant de même intensité I circule en sens inverse. On suppose que ces courants se répartissent uniformément sur la section des deux conducteurs.

1. Déterminer le champ magnétique \vec{B} en tout point de l'espace et représenter ses variations.
2. On suppose dorénavant que b et c sont très proches de manière à négliger la contribution de la gaine aux grandeurs à calculer. Exprimer l'énergie magnétique emmagasinée dans un tronçon de longueur h de ce câble.
3. En déduire l'inductance Λ par unité de longueur de ce câble. La calculer numériquement pour $a = 0,48$ mm et $b = 1,48$ mm.

48. Résistance et effet de peau (A. Briand, N. Claudon)

Lorsque la fréquence du courant électrique augmente, on constate que la résistance des fils conducteurs devient de plus en plus grande. On interprète ce comportement par l'effet de peau, phénomène dans lequel le courant électrique se concentre près de la surface du métal et ne circule presque plus dans son cœur. Pour l'étudier, on considère dans un premier temps une pièce métallique de conductivité γ occupant le demi-espace $z \geq 0$ et dans laquelle le courant électrique circule dans la direction de \vec{u}_x . On admet que le champ électrique \vec{E} est donné par

$$\vec{E}(z,t) = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} .$$

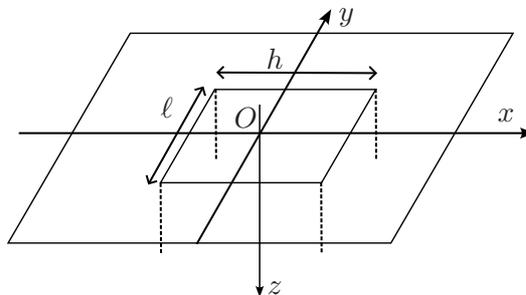


FIGURE 21 – Métal semi-infini

1. On considère un segment de longueur ℓ tracé à la surface du conducteur et colinéaire à \vec{u}_y . Exprimer l'intensité qui traverse la section droite perpendiculaire à \vec{u}_x et située « sous » ce segment, c'est à dire la surface définie $x = Cste$, par $0 \leq y \leq \ell$ et $z \geq 0$.
2. On considère maintenant un rectangle tracé à la surface du métal dont les côtés ont pour longueurs ℓ (selon \vec{u}_y) et h (selon \vec{u}_x). Déterminer la puissance dissipée par effet Joule dans la partie du métal située « sous » ce rectangle, c'est à dire le volume défini par $0 \leq y \leq \ell$, $0 \leq x \leq h$, $z \geq 0$.

3. Comment s'exprime usuellement la puissance Joule moyenne $\langle P \rangle$ dissipée dans une résistance R parcourue par un courant périodique d'intensité $I(t)$? On convient d'utiliser cette relation comme *définition* de la résistance R de la partie du métal considérée dans la question précédente. En déduire l'expression de R en fonction de h , ℓ , γ et δ . Commenter le résultat en le rapprochant d'un autre plus courant.

4. Considérons maintenant un fil électrique cylindrique de rayon a et de conductivité γ parcouru par un courant de pulsation ω . L'étude mathématique de l'effet de peau dans cette situation invariante par rotation devrait se faire en coordonnées cylindriques. À quelle condition peut-on approximativement utiliser les résultats précédents, reposant sur une géométrie plane? Exprimer dans ce cadre la résistance d'un tronçon de fil de longueur h .

5. On considère un fil de cuivre caractérisé par $a = 1,48 \text{ mm}$ et $\gamma = 5,8.10^7 \text{ S.m}^{-1}$. Dans quel intervalle de fréquences l'approximation de la question précédente est-elle valide? Calculer la résistance du fil pour $L = 100 \text{ m}$ et une fréquence acceptable accessible avec un GBF disponible dans un lycée.

49. Inductance propre et effet de peau (E. Cristina, É. De Maio-Lévy)

On utilise généralement le concept d'inductance propre pour caractériser les propriétés magnétiques des circuits filiformes. Cependant, un fil même très fin possède un certain diamètre et on peut s'interroger sur le champ magnétique qui règne à l'intérieur de ce fil et sur ses effets. En régime alternatif, ce champ et la densité volumique de courant associée sont soumis à l'effet de peau : le courant se concentre près de la surface du métal et ne circule presque plus dans son cœur. Pour étudier ce phénomène, on considère dans un premier temps une pièce métallique de conductivité γ occupant le demi-espace $z \geq 0$ et dans laquelle le courant électrique circule dans la direction de \vec{u}_x . On admet que le champ électrique y est donné par

$$\vec{E}(z,t) = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \quad .$$

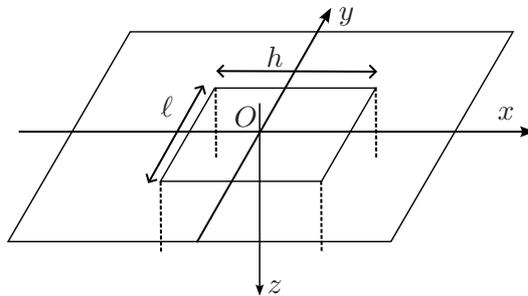


FIGURE 22 – Métal semi-infini

1. On considère un segment de longueur ℓ tracé à la surface du conducteur et colinéaire à \vec{u}_y . Exprimer l'intensité $I(t)$ qui traverse la section droite perpendiculaire à \vec{u}_x et située « sous » ce segment, c'est à dire la surface définie $x = \text{Cste}$, par $0 \leq y \leq \ell$ et $z \geq 0$.

2. On considère maintenant un rectangle tracé à la surface du métal dont les côtés ont pour longueurs ℓ (selon \vec{u}_y) et h (selon \vec{u}_x). Déterminer l'énergie magnétique moyenne $\langle \mathcal{E}_m \rangle$ stockée dans le volume de métal situé « sous » ce rectangle, c'est à dire dans la région définie par $0 \leq y \leq \ell$, $0 \leq x \leq h$, $z \geq 0$ (on parle d'une moyenne temporelle).

3. Comment s'exprime usuellement l'énergie magnétique moyenne $\langle \mathcal{E}_m \rangle$ stockée dans une bobine d'auto-inductance L parcourue par un courant périodique d'intensité $I(t)$? On convient d'utiliser cette relation comme *définition* de l'auto-inductance de la partie du métal considérée dans la question précédente. En déduire l'expression de L en fonction de h , ℓ , μ_0 et δ .

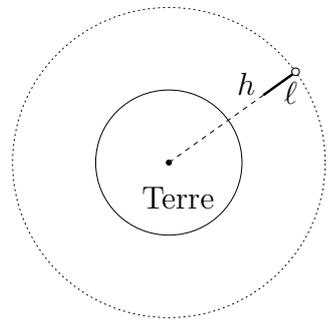
4. Le phénomène étudié ici intervient notamment dans l'inductance parasite des câbles coaxiaux. Considérons un fil électrique cylindrique de rayon a et de conductivité γ parcouru par un courant de pulsation ω . L'étude mathématique de cette situation invariante par rotation devrait se faire en coordonnées cylindriques. À quelle condition peut-on approximativement utiliser les résultats précédents reposant sur une géométrie plane? Exprimer dans ce cadre l'inductance propre d'un tronçon de fil de longueur h . Comment varie-t-elle avec ω ?

5. On considère un fil de cuivre caractérisé par $a = 1,48 \text{ mm}$ et $\gamma = 5,8.10^7 \text{ S.m}^{-1}$. Dans quel intervalle de fréquences l'approximation de la question précédente est-elle valide ? Calculer l'inductance propre de ce conducteur pour $h = 100 \text{ m}$ et une fréquence acceptable accessible avec un GBF disponible dans un lycée.

50. Propulsion magnétique d'un satellite (A. Daniel, T. Dellestable)

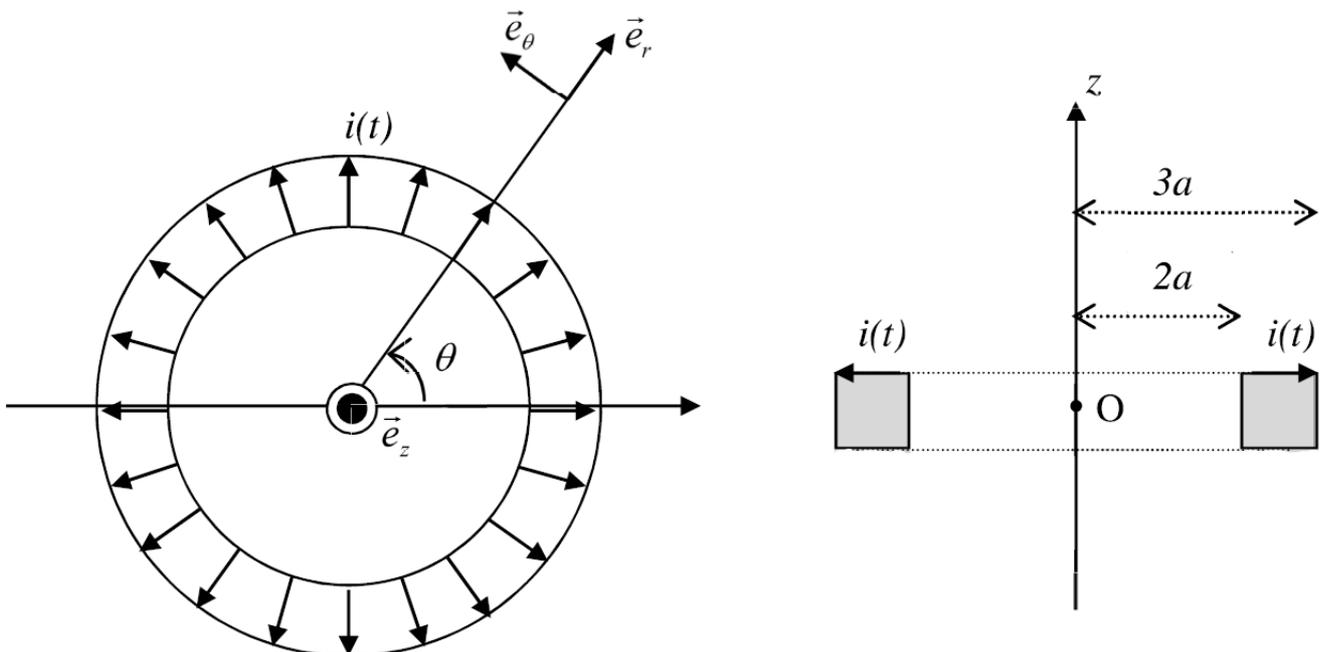
On envisage ici une technologie de propulsion d'un satellite de masse m mettant à profit le champ magnétique terrestre. On assimile ce champ à celui d'un dipôle placé au centre de la Terre, dont le moment dipolaire est parallèle à l'axe de rotation de la Terre et dont le pôle nord se situe du côté du pôle sud géographique. Données : masse de la Terre $M_T = 6.10^{24} \text{ kg}$, rayon de la Terre $R_T = 6,4.10^3 \text{ km}$, moment magnétique terrestre $\mathcal{M} = 7,7.10^{22} \text{ A.m}^2$, masse du satellite $m = 2.10^3 \text{ kg}$, constante de gravitation $G = 6.67.10^{-11} \text{ kg}$, altitude du satellite $h = 800 \text{ km}$.

1. Le satellite possède une trajectoire circulaire à l'altitude h dans le plan équatorial. Déterminer sa vitesse et la calculer numériquement. Exprimer son énergie mécanique en fonction de G , M_T , m , R_T et h . Dans la suite, on admet la validité de cette expression même si la trajectoire n'est pas exactement circulaire.
2. Un câble conducteur de longueur $\ell = 20 \text{ m}$, dont la surface latérale est isolée par une gaine, est suspendu sous le satellite dans la direction pointant vers le centre de la Terre. Un courant électrique peut circuler entre ses deux extrémités et, grâce aux particules chargées de la ionosphère, on obtient un circuit fermé de résistance électrique R . On admet que la fem induite dans le câble s'exprime de la même manière que pour une barre mobile sur des rails de Laplace. Dans quel sens le courant circule-t-il dans le câble ? Sachant que son intensité est de $0,44 \text{ A}$, trouver la valeur de R .
3. Le satellite est muni d'un générateur électrique alimenté par des panneaux solaires et fournissant une puissance $P = 500 \text{ W}$. On l'insère en série dans le circuit de la question précédente de manière à contrôler l'intensité du courant et donc la force magnétique s'exerçant sur le câble. Dans quel sens faut-il faire circuler le courant pour que le satellite gagne de l'altitude ? Quelle est son intensité ?
4. Combien de temps faut-il faire circuler ce courant pour obtenir un gain d'altitude de 500 m ?



51. Pince ampèremétrique (J. Dryja)

Une pince ampèremétrique est schématiquement composée de N spires carrées de côté a placées en série, de résistance totale R et disposées sur un tore dont les rayons intérieurs et extérieurs sont respectivement égaux à $2a$ et $3a$. Ce circuit est fermé sur un ampèremètre d'impédance négligeable. Sur l'axe de révolution (Oz) de ce tore se trouve un fil rectiligne, supposé infini, dans lequel circule un courant d'intensité $I = I_0 \cos(\omega t)$.



Montrer que la mesure de l'intensité i circulant dans les spires permet d'accéder à I_0 . Établir, en fonction de la pulsation et des caractéristiques du dispositif, le lien entre les deux intensités. Quel est l'intérêt pratique d'un tel système ? Quelles en sont les limitations ?

52. Rotation d'une pièce de monnaie (D. Dubuisson-Thiéry)

Une pièce de monnaie placée dans un plan vertical et posée sur une table est mise en rotation autour de son diamètre vertical. Elle est plongée dans un champ magnétique horizontal. Étudier son mouvement.

Ondes

53. Vibration d'une chaîne de charges électriques (A. Fabri, T. Farcas)

Des charges électriques ponctuelles de masse m , de même valeur absolue Q , alternativement positives et négatives, sont placées à égale distance a les unes des autres le long de la droite (O, \vec{u}_x) . Chacune peut se déplacer sans frottement parallèlement à \vec{u}_y , comme le feraient des perles guidées par des fils rectilignes. On note y_n le déplacement de la particule de rang n , avec $y_n \ll a$.

1. En ne considérant que les interactions entre plus proches voisins, écrire l'équation du mouvement d'une particule donnée.
2. Effectuer le passage à la limite continue et montrer que le déplacement des particules obéit à une équation d'onde. Donner l'expression de la célérité.
3. Reprendre les questions précédentes en considérant *toutes* les interactions. Quelle difficulté pose dans ce cas la passage à la limite continue ? Pour exprimer la célérité, on utilisera la somme de la série harmonique alternée

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad .$$

4. Reprendre l'analyse dans le cas où les charges ponctuelles sont remplacées par des dipôles électriques de masse m portant alternativement des moments dipolaires $p\vec{u}_y$ et $-p\vec{u}_y$, libres de se translater parallèlement à \vec{u}_y .
5. Proposer une application numérique dans le cas de molécules polaires occupant les nœuds d'un réseau cristallin. Commenter.

54. Mouvement d'une corde de violon (A. Fabert, M. Floriot)

On analyse le mouvement d'une corde de violon de masse linéique μ tendue sous une tension T entre deux points fixes d'abscisses $x = 0$ et $x = L$. Observée à l'œil nu, elle semble osciller selon son mode propre fondamental. Une analyse plus précise, due à Helmholtz, fait apparaître une réalité plus complexe. La corde se présente sous la forme de deux segments séparés par un point anguleux A allant d'une extrémité à l'autre à vitesse V . Le déplacement $y(x,t)$ des points de la corde s'écrit pour $t \in [0, L/V]$

$$\begin{aligned} &\text{pour } x \in [0, Vt], y(x,t) = \beta x(L - Vt) \\ &\text{pour } x \in [Vt, L], y(x,t) = \beta(L - x)Vt \end{aligned}$$

où $\beta \ll 1/L$.

1. Représenter sur une seule figure la corde à divers instants. Vous pouvez utiliser Python⁵.
2. Vérifier qu'en dehors du point anguleux, les équations du problème sont satisfaites.
3. On considère le tronçon infinitésimal de corde de longueur δx qui, pendant δt , est traversé par le point anguleux. En lui appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que V s'identifie à la célérité des ondes transversales dans la corde. Retrouver ce résultat en raisonnant sur la quantité de mouvement de la corde entière.

5. On peut aussi consulter <http://www.phys.unsw.edu.au/jw/Bows.html>

4. Déterminer le mouvement de la corde pour $t \in [L/V, 2L/V]$ et compléter la figure de la question 1 par de nouvelles positions de la corde. Chercher le lieu des points successivement occupés par A et faire le lien avec la perception visuelle.
5. Expliciter le mouvement $y(x_0, t)$ d'un point donné de la corde et le représenter $y(x_0, t)$. Expliquer comment l'archet, frottant la corde en se déplaçant à vitesse constante selon \vec{u}_y , peut produire un tel phénomène.

55. Célérité du son dans la mousse (A. Galant)

Une mousse est un milieu diphasique formé de liquide et de gaz. Le gaz se répartit dans un grand nombre de bulles parfois invisibles à l'œil nu et séparées les unes des autres par des frontières liquides. Citons en exemples la mousse à raser, la crème Chantilly ou encore celle que l'on peut former à la surface de l'eau dans une baignoire. Dans un modèle simple, la célérité c des ondes sonores dans une mousse est donnée par la loi de Wood :

$$c^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_l \phi (1 - \phi)} .$$

Dans cette expression

- P_0 désigne la pression ambiante,
 - ρ_l désigne la masse volumique du liquide,
 - γ est le rapport c_p/c_v du gaz,
 - ϕ est la fraction volumique du liquide dans la mousse.
1. Rappeler (ou retrouver) l'expression de la vitesse du son dans un fluide en rappelant les hypothèses et en définissant les grandeurs qui interviennent dans ce résultat classique.
 2. En analysant le cas particulier d'une mousse et en procédant à des hypothèses raisonnables, retrouver la loi de Wood.
 3. Cette loi ne s'applique qu'à fréquence assez basse, sans quoi le caractère hétérogène de la mousse, visible à petite échelle, se fait sentir. Préciser les conditions d'application de la loi de Wood en faisant intervenir le diamètre moyen des bulles.

56. Onde sonore dans un écoulement (S. Gilet)

On considère un fluide s'écoulant à la vitesse constante et uniforme $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ par rapport au référentiel terrestre. On note ρ_0 sa masse volumique, P_0 sa pression, χ_S sa compressibilité isentropique et on pose $c^2 = 1/(\rho_0 \chi_S)$. En présence d'une onde acoustique, les champs de vitesse, de masse volumique et de pression deviennent respectivement

$$\vec{V}(M, t) = \vec{v}_0 + \vec{v}(M, t) \quad P(M, t) = P_0 + p(M, t) \quad \rho(M, t) = \rho_0 + \delta\rho(M, t) .$$

1. En se plaçant dans le cadre usuel de l'approximation acoustique, trouver deux équations aux dérivées partielles satisfaites par p et \vec{v} .
2. Montrer qu'il existe des directions de propagation pour lesquelles l'écoulement du fluide est sans effet sur l'onde acoustique.
3. Établir l'équation d'onde à laquelle $p(x, t)$ obéit.
4. Dans la suite, on se limite à des ondes planes telles que $p(M, t) = p(x, t)$. Trouver leur relation de dispersion.
5. Obtenir les deux vitesses de phase possibles et interpréter les résultats.

57. Excitation d'un tuyau sonore par un piston vibrant (Mines-Ponts) (M. Gravier)

On considère un tuyau cylindrique de section S et de longueur L contenant de l'air de pression P_0 , de masse volumique ρ_0 et de compressibilité isentropique χ_s . Son extrémité d'abscisse $x = L$ est fermée par une cloison rigide et l'autre, d'abscisse $x = 0$, est un piston vibrant dont la vitesse dépend du temps selon $U(t) = U_0 \cos \omega t$.

1. Exprimer la pression et la vitesse acoustique pour dans le tuyau.

2. L'extrémité d'abscisse L possède maintenant une impédance Z_1 . Comment trouver $p(x,t)$ et $v(x,t)$?
3. Le calcul explicite conduit à l'expression ci-dessous, qu'il est demandé de commenter :

$$\underline{v}(x,t) = \frac{Z_a + Z_1}{2Z_a} \frac{U_0 e^{i\omega t}}{\cos kL + i \frac{Z_1}{Z_a} \sin kL} \left(e^{ik(L-x)} - \rho e^{-ik(L-x)} \right) \quad \text{avec} \quad Z_a = \rho_0 c \quad \text{et} \quad \rho = \frac{Z_1 - Z_a}{Z_1 + Z_a} .$$

58. Gravité et acoustique (É. Henry)

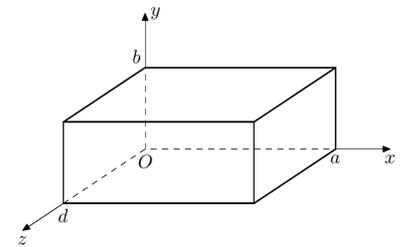
Dans la mise en équation usuelle des ondes acoustiques, on omet délibérément le champ de gravité. Montrer que sa prise en compte conduit à l'équation d'onde

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \vec{g} \cdot \vec{\nabla} p = 0 .$$

Par une analyse d'ordre de grandeur, discuter l'importance du terme gravitaire selon la longueur d'onde.

59. Onde stationnaire dans un four micro-onde (P.-É. Huguin, N. Lakouanane, É. Mihic)

Pour étudier le champ électromagnétique dans un four micro-onde, on a réalisé une boîte parallélépipédique aux parois métalliques délimitant la portion de l'espace définie par $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq d$, avec $a = 36$ cm, $b = 24$ cm et $d = 26,5$ cm. Dans le métal constituant ces plaques métalliques, le champ électrique est nul. Par contre, un champ non nul peut exister à leur surface immédiate et on admet qu'il leur est orthogonal. On cherche le champ électrique sous la forme



$$\begin{cases} E_x(x, y, z, t) = E_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos \omega t \\ E_y(x, y, z, t) = E_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos \omega t \\ E_z(x, y, z, t) = E_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos \omega t \end{cases} .$$

1. Montrer que seules certaines valeurs discrètes k_x , k_y et k_z sont possibles et les exprimer en fonction de trois entiers notés respectivement m , n et ℓ .
2. Exprimer la fréquence $f_{m,n,\ell}$ du mode d'indices (m, n, ℓ) en fonction de ces entiers, des caractéristiques de la cavité et de constantes universelles.
3. On place dans le four une feuille imbibée d'hexahydrate de chlorure de cobalt de couleur rose. Lorsqu'il s'échauffe, il se déshydrate et devient bleu. La figure (23) représente le résultat obtenu pour trois positions de la feuille. Déterminer les entiers (m, n, ℓ) puis calculer la fréquence. À titre d'information, on indique que la fréquence des fours commerciaux est de 2,45 GHz.

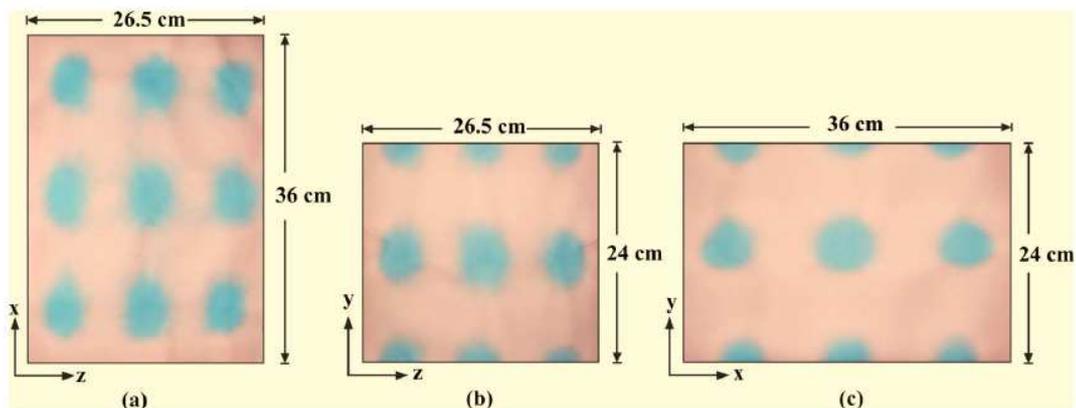


FIGURE 23 – Aspect de la feuille d'hexahydrate de chlorure de cobalt placée dans trois positions : (a) dans le plan $y = b/2$, (b) : dans le plan $x = a/2$, (c) : dans le plan $z = d/2$.

4. L'une des composantes E_x , E_y et E_z est nulle. Laquelle ?

60. Trois polariseurs (d'après CCP) (A. Kemayou Kohpé)

On utilise dans une manipulation d'optique une source de lumière naturelle placée devant un collimateur de manière à produire une onde plane, ainsi que trois polariseurs P_1 , P_2 et P_3 que l'on peut disposer perpendiculairement au faisceau en les alignant les uns avec les autres. La lumière émergente est reçue sur un écran d'observation.

1. Pour l'instant on n'utilise que P_1 et P_2 . Comment faire pour que la lumière sur l'écran s'éteigne, sans éteindre la source bien entendu.
2. On introduit maintenant P_3 . Est-il possible de faire réapparaître la lumière sur l'écran ? Si oui, où et comment le disposer pour maximiser l'éclairement. Si non, pourquoi ?

61. Ondes hertziennes dans l'eau de mer (C. Khelil)

On étudie la propagation d'ondes hertziennes dans de l'eau de mer. On admet que l'eau est localement neutre ($\rho = 0$). Sa permittivité diélectrique relative $\epsilon_r = 80$ (on remplace dans les équations de Maxwell ϵ_0 par $\epsilon_r \epsilon_0$) et sa conductivité $\sigma = 6,23 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ sont supposées réelles. On admettra que la loi d'Ohm locale peut s'appliquer dans un tel milieu.

1. Quelle est le domaine des fréquences des ondes hertziennes ? Donner les équations de Maxwell dans le milieu. Comment se situe la conductivité du cuivre comparée à celle de l'eau de mer ? Peut-on alors négliger les courants de déplacement ?
2. Déterminer l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique.
3. Établir la relation de dispersion.
4. Déterminer la fréquence de coupure au-delà de laquelle il n'y a pas absorption. Quelle est la vitesse de phase dans ce cas ?
5. La fréquence d'une onde est $f = 100 \text{ MHz}$. Déterminer la valeur de la pulsation spatiale k . Déterminer la distance caractéristique d'absorption de l'onde et sa vitesse de phase. Y a-t-il dispersion ? Pourquoi n'utilise-t-on pas d'ondes hertziennes pour les communications sous-marines ?

Mécanique quantique

62. Interférences de molécules de phtalocyanines (V. Moniot)

En 2012, une équipe de chercheurs a publié un article exposant les résultats d'une manipulation produisant des interférences de molécules de phtalocyanine $\text{C}_{32}\text{H}_{18}\text{N}_8$ (masse $m = 8,5 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$). Le dispositif (figure 24) est constitué d'un laser qui fait s'évaporer les molécules déposées sur la fenêtre d'entrée W_1 . Le faisceau ainsi produit est collimaté à l'aide d'une fente S , puis les molécules atteignent un réseau de fentes de pas $a = 100 \text{ nm}$. Au delà de ce réseau de diffraction, les molécules parviennent à un détecteur W_2 à la distance $L_2 = 564 \text{ mm}$. La répartition spatiale des molécules sur l'écran fait apparaître trois franges bien visibles (image a). L'histogramme (c) donne le nombre total de particules détectées entre les deux lignes en pointillés pour chaque abscisse x exprimée en micromètres entre -60 et $+60$ environ.

À partir de leur point de départ de cote $y = 0$ et jusqu'à leur arrivée à l'écran situé à une distance $D = 96 \text{ cm}$, les molécules sont soumises au champ de pesanteur $\vec{g} = -g \vec{u}_y$ et atteignent donc l'écran un peu plus bas, à des ordonnées $y_{\text{écran}}$ qui se répartissent entre $-240 \mu\text{m}$ et $0 \mu\text{m}$ environ. Cela est lié à la dispersion de leurs vitesses initiales, de la forme $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$ avec des valeurs de v_0 variant d'une molécule à une autre.

1. Relier v_0 à $y_{\text{écran}}$ en faisant intervenir d'autres grandeurs pertinentes.
2. Expliquer pourquoi on observe des franges sur l'écran.
3. Les distances mises en jeu permettent de considérer que l'écran est à l'infini par rapport au réseau G . Exprimer l'abscisse x_p des franges brillantes en fonction d'un entier p , de v_0 et d'autres paramètres du problème.
4. Interpréter les résultats expérimentaux.

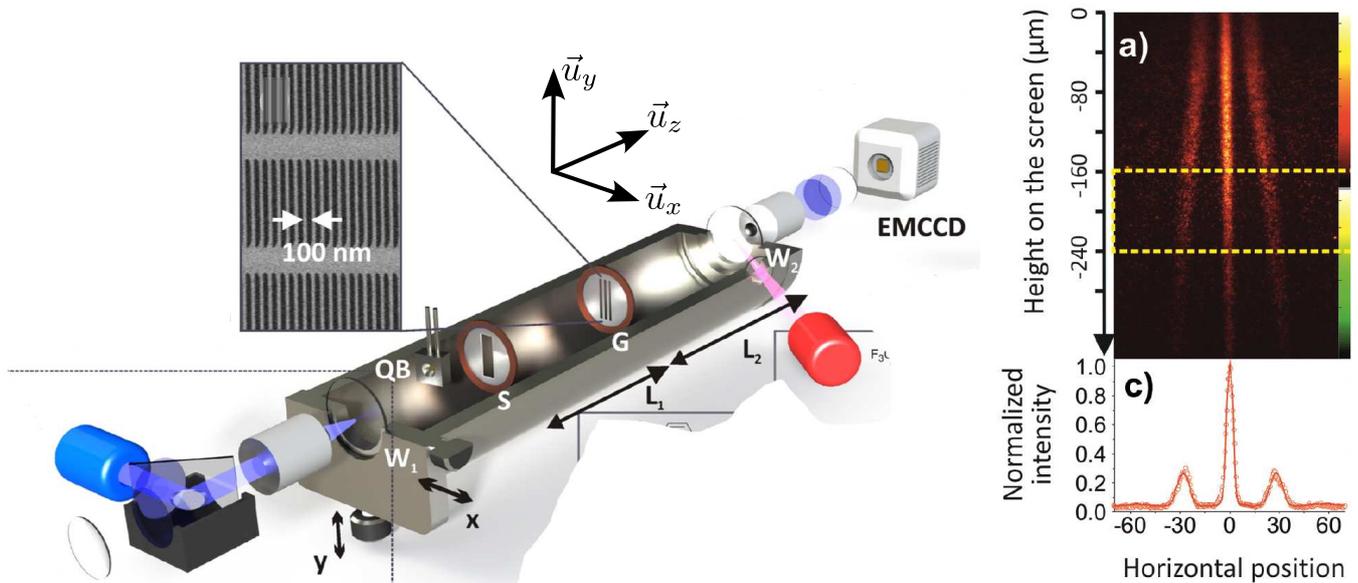


FIGURE 24 – À gauche : dispositif expérimental pour l’expérience d’interférences de molécules de phtalocyanine. À droite : résultats obtenus. Les abscisses et les ordonnées sont exprimées en micromètres.

63. Couleurs des cyanines et boîtes quantiques (A. Pierrat)

Les cyanines sont des cations possédant une succession liaisons conjuguées dans une chaîne d’atomes de carbones (figure 25). Chacun de ces atomes possède un électron π qui est délocalisé sur l’ensemble de la chaîne et bloqué à ses deux extrémités par l’atome d’azote. On se limite ici aux molécules pour lesquelles le nombre p d’atome C est impair et on note $p = 2q + 1$. La longueur de la chaîne vaut $(p + 1)l$ où $l = 0,14\text{nm}$ représente la distance interatomique. Ces molécules présentent une raie d’absorption dans la partie visible du spectre, ce qui leur confère des couleurs caractéristiques et expliquer qu’on les utilise fréquemment comme colorants. Pour p variant de 5 à 11, on a relevé la longueur d’onde λ correspondante et dressé le tableau (??).

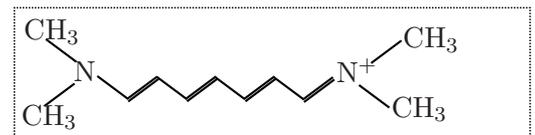


FIGURE 25 – Formule semi-développée d’une cyanine. Conformément à l’usage de la chimie organique, les atomes de carbones ne sont pas représentés mais on a indiqué les liaisons entre eux.

p	5	7	9	11
q	2	3	4	5
λ (nm)	416	519	625	735

TABLE 1 – Longueurs d’onde d’absorption des cyanines

On traite les électrons π comme des particules indépendantes évoluant dans un puits de potentiel à une dimension. Comme dans un atome, leur répartition est régie par les règles de Pauli et de Hund et se fait de manière à minimiser l’énergie totale. L’absorption de lumière correspond au passage de l’électron de plus haute énergie vers l’orbitale vacante d’énergie immédiatement supérieure.

Interpréter l’évolution de λ avec p et estimer, d’un point de vue théorique, les longueurs d’onde d’absorption. Commenter l’accord ou l’écart aux résultats expérimentaux.

64. Neutrons dans le champ de pesanteur (É. Kuagbenu, B. Molé)

On étudie le comportement de neutrons de masse $m = 1,67.10^{-27}$ kg dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ ($g = -9,81\text{m.s}^{-2}$). Ils peuvent accéder à tout le demi-espace défini par ($z > 0$) et au contraire, la région ($z < 0$) leur est interdite.

1. Construire à partir de m , g et de la constante de Planck réduite \hbar une quantité ℓ_g homogène à une longueur et une quantité E_g homogène à une énergie. Afin d’assurer la compatibilité avec la suite des questions, on placera

le facteur sans dimension $2^{1/3}$ dans le dénominateur de ces expressions. Les calculer numériquement et leur attribuer une signification qualitative.

2. On étudie des états dans lesquels la seule variable d'espace pertinente est la cote z et on s'intéresse à des états stationnaires associés à l'énergie E . Rappeler la forme de la fonction d'onde $\Psi(z,t)$ pour ces états et écrire l'équation de Schrödinger aux états stationnaires.

3. Réécrire cette équation en utilisant les variables adimensionnées $\zeta = z/\ell_g$ et $e = E/E_g$. Préciser les conditions aux limites satisfaites par la partie spatiale de la fonction d'onde $\Phi(\zeta)$.

4. Les solutions acceptables de l'équation de la question précédente sont de la forme $\Phi(\zeta) = \mathcal{N}\text{Ai}(\zeta - e)$ où \mathcal{N} est un facteur de normalisation et Ai la fonction d'Airy représentée sur la figure (26). Ses trois premières racines sur \mathbb{R}^- sont $\zeta_1 = -2,34$, $\zeta_2 = -4,90$ et $\zeta_3 = -5,52$. Exprimer les niveaux d'énergie et calculer numériquement les trois plus bas.

5. Représenter et interpréter la densité de probabilité de présence pour ces trois états.

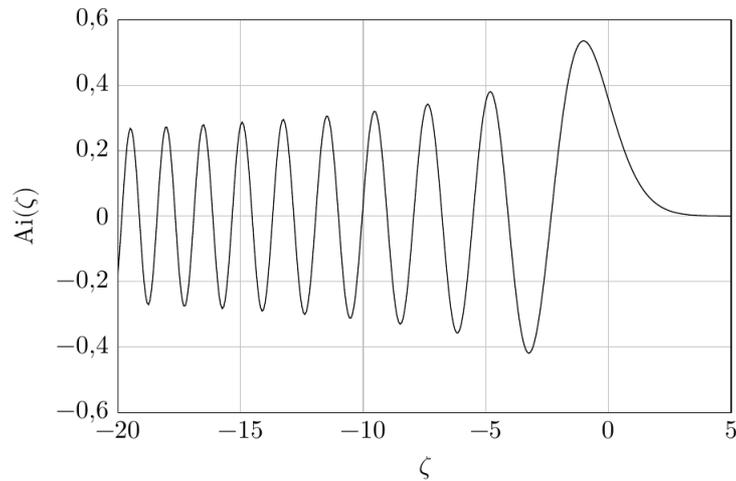


FIGURE 26 – Graphe de la fonction d'Airy

65. Modèle de Kronig et Penney (1931) (L. Ragot)

Dans un solide cristallin, les électrons sont soumis à un potentiel périodique créé par les ions du réseau. Cette *périodicité*, indépendamment de la forme précise du potentiel, est à l'origine d'une forme particulière du spectre des niveaux énergétiques appelée *structure de bande* : les énergies permises forment des intervalles disjoints, séparés par des intervalles appelés bandes interdites. Cette propriété a été expliquée (ou découverte ?) dès 1931 par Kronig et Penney grâce à un modèle simple dont des variantes sont encore étudiées aujourd'hui.

On se limite à une description unidimensionnelle et le potentiel périodique, s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$, est représenté sur la figure 27. On note $d = a + b$ le pas du réseau.

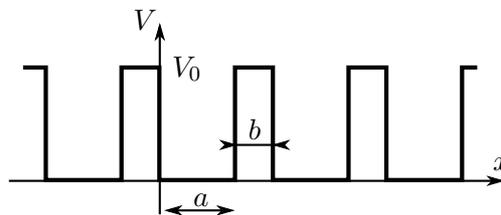


FIGURE 27

1. Citer une grandeur de la théorie quantique dont peut s'attendre à ce qu'elle soit d-périodique. En exploitant cette idée, on peut démontrer les propriétés suivantes⁶.

$$\forall x, \quad \Phi(x + d) = e^{i\theta} \Phi(x) \quad \frac{d\Phi}{dx}(x + d) = e^{i\theta} \frac{d\Phi}{dx}(x) \quad .$$

Le déphasage θ peut prendre toute les valeurs dans $[-\pi, \pi]$.

6. Il s'agit de conséquences d'un théorème dû à Félix Bloch (1928)

2. On étudie des états stationnaires d'énergie $E < V_0$. Expliciter la fonction d'onde sur $[0, a]$ et sur $[a, d]$ en faisant intervenir 4 constantes.

3. Expliciter les conditions de passage pour la fonction d'onde puis, en utilisant la propriété fournie dans la question 1, en déduire un système de 4 relations linéaires satisfaites par les 4 constantes.

4. À quelle condition la résolution ce système (non demandée) peut-elle conduire à des fonctions d'onde non identiquement nulles ? Un long calcul permet d'exprimer cette condition sous la forme :

$$\cos \theta = \cosh(\rho b) \cos qa + \frac{(\rho^2 - q^2)}{2\rho q} \sin(qa) \sinh(\rho b) \quad \text{avec} \quad q = \sqrt{2mE}/\hbar \quad \rho = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar \quad (1)$$

5. Dans cette question on pose $X = qa$. Pour des valeurs numériques données de d , a , b , V_0 et m , on peut exprimer ρ en fonction de X puis tracer le graphe de la fonction

$$g : X \rightarrow \cosh(\rho b) \cos X + \frac{(\rho^2 - q^2)}{2\rho q} \sin(X) \sinh(\rho b) \quad .$$

Le résultat est représenté dans la partie supérieure de la figure ??.

Comment l'intervalle de variations de X est-il choisi ? Quelles sont les énergies permises ? Conclure en lien avec l'introduction du problème.

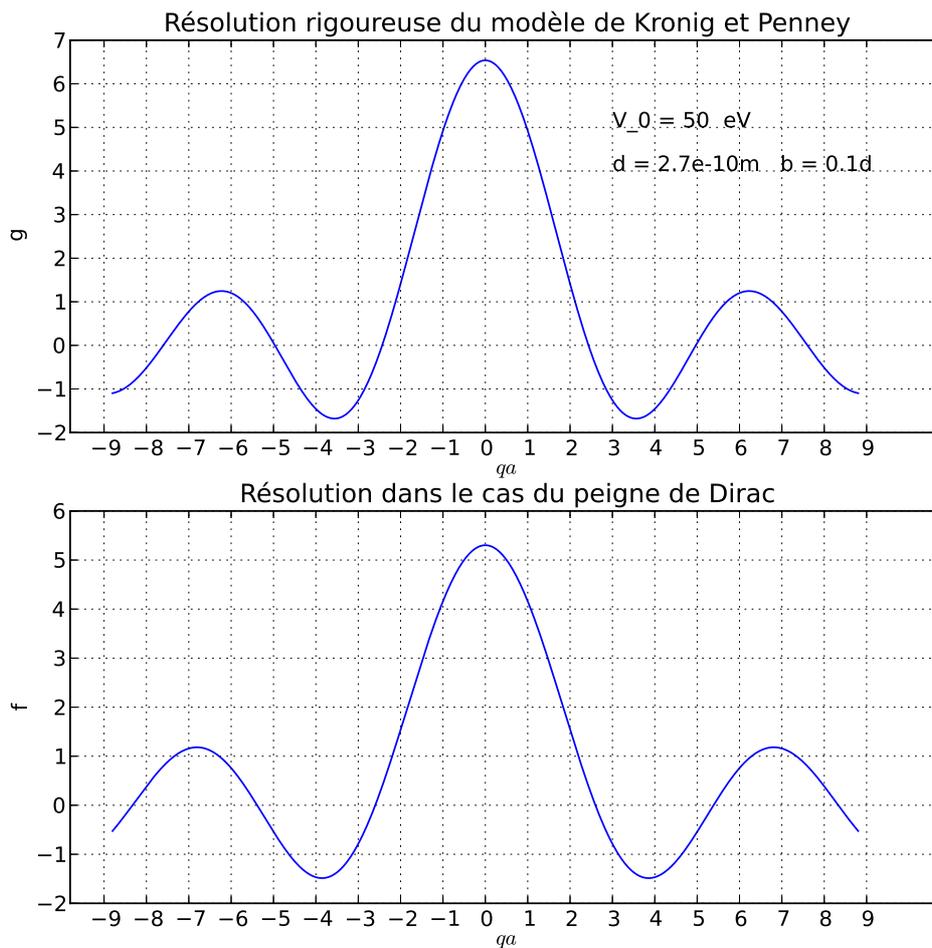


FIGURE 28 – Exemple de résolution du modèle de Kronig et Penney