PC* — mathématiques **jeudi 6 octobre 2016**
Corrigé du devoir en temps libre nº 3

Corrigé du devoir en temps libre nº 3

Exercice 1. I.1. La fonction $f_{n,\alpha} : t \mapsto \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est définie et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Quand t tend vers $+\infty$, on remarque que $f_{n,\alpha}(t)$ est équivalent à $1/t^{n\alpha}$. Or la fonction $t \mapsto 1/t^{n\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$ car $n\alpha > 1$. On en déduit que la fonction $f_{n,\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Son intégrabilité sur $[0, 1]$ est déjà connue donc elle est intégrable sur $[0, 1]$.

Finalement, le nombre $u_n(\alpha)$ est bien défini.

I.2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Fixons $x > 0$ et $y > x$ et effectuons une intégration par parties dans l'intégrale

$$\int_x^y \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}.$$

On dérive la fonction $f_{n,\alpha}$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[x, y]$, de dérivée $t \mapsto -n\alpha t^{\alpha-1}/(1+t^\alpha)^{n+1}$. On primitive la fonction $t \mapsto 1$ en $t \mapsto t$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_x^y \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} &= \frac{y}{(1+y^\alpha)^n} - \frac{x}{(1+x^\alpha)^n} + n\alpha \int_x^y \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{y}{(1+y^\alpha)^n} - \frac{x}{(1+x^\alpha)^n} + n\alpha \int_x^y \frac{1+t^\alpha-1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{y}{(1+y^\alpha)^n} - \frac{x}{(1+x^\alpha)^n} + n\alpha \int_x^y \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\ \mathrm{d}t - n\alpha \int_x^y \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On remarque maintenant que $\dfrac{x}{(1+x^\alpha)^n}$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et que $\dfrac{y}{(1+y^\alpha)^n}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$ (car $\alpha n > 1$). Ainsi, en faisant tendre x vers 0 puis y vers $+\infty$ (ou l'inverse, mais pas les deux en même temps car ça n'aurait aucun sens), on obtient

$$u_n(\alpha) = n\alpha\left(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)\right).$$

Remarque. Il n'est en fait pas nécessaire de s'écarter de la borne 0 car la condition $\alpha > 1$ fait que la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ mais avec ces fonctions-là, ce genre de précaution ne coûte pas cher et évite des ennuis.

I.3. On considère une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions définies sur un même intervalle I. On fait les hypothèses suivantes

- pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux sur l'intervalle I ;
- la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur l'intervalle I ;
- sa somme est continue par morceaux sur l'intervalle I ;
- la série numérique $\sum \int_{\mathrm{I}} |f_n|$ est convergente.

Alors la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et son intégrale est donnée par

$$\int_{\mathrm{I}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Appliquons ce théorème à la suite de fonctions $(f_{n,\alpha})_{n\geqslant 1}$ sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0, +\infty[$.

• Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction $f_{n,\alpha}$ est continue et intégrable sur I, comme on l'a vu à la première question.

• Soit t dans I. La suite $(f_{n,\alpha}(t))_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique dont la raison est $1/(1+t^\alpha)$. Cette raison est dans $]0,1[$ donc la série de terme général $f_{n,\alpha}(t)$ est convergente.

La série de fonctions $f_{n,\alpha}$ converge donc simplement sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

• La somme de cette série de fonctions est la fonction

$$\mathrm{F}_\alpha : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} = \frac{1/(1+t^\alpha}{1-\frac{1}{1+t^\alpha}} = \frac{1}{t^\alpha}.$$

Cette fonction est continue sur l'intervalle I.

• Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_{\mathrm{I}} |f_{n,\alpha}(t)|\ \mathrm{d}t$ est le nombre $u_n(\alpha)$. L'énoncé a supposé que la série $\sum u_n(\alpha)$ est convergente.

On le voit : toutes les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont remplies. On peut donc en déduire que la fonction F_α est intégrable sur l'intervalle I. Mais c'est faux. En effet, l'hypothèse $\alpha > 1$ fait que cette fonction n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

Cette absurdité prouve que l'hypothèse de l'énoncé est fausse. La série de terme général $u_n(\alpha)$ est en fait divergente.

Remarque. Ce travail est en fait inutile car l'équivalent de la question suivante redonne cette divergence. Cette question est simplement un prétexte pour faire manipuler le théorème d'intégration terme à terme.

I.4. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On trouve

$$w_{n+1}(\alpha)-w_n(\alpha) = \ln\left(\frac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)}\right)+\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n\alpha-1}{n\alpha}\right)+\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n\alpha}\right)+\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

On connaît le développement limité $\ln(1+s) = s + \underset{s\to 0}{\mathcal{O}}(s^2)$. On en déduit le développement limité

$$w_{n+1}(\alpha)-w_n(\alpha) = -\frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On sait que la série de terme général $1/n^2$ est convergente. On en déduit que la série $\sum(w_{n+1}(\alpha)-w_n(\alpha))$ est absolument convergente, donc convergente. C'est la série des différences de la suite $(w_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$ donc cette suite est convergente. Notons $k(\alpha)$ sa limite. Remarquons maintenant la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad w_n(\alpha) = \ln\left(n^{1/\alpha}u_n(\alpha)\right).$$

Par continuité de l'exponentielle, on voit que $n^{1/\alpha}u_n(\alpha)$ tend vers $\exp(k(\alpha))$ quand l'entier n tend vers $+\infty$. Posons

$$\mathrm{K}(\alpha) = \exp(k(\alpha)).$$

Ce nombre est strictement positif et on a prouvé que $u_n(\alpha)$ est équivalent à $\mathrm{K}(\alpha)/n^{1/\alpha}$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

I.5. Soit N dans $\mathbb{N}^*$. On trouve, à l'aide de la relation de récurrence de la question 2,

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{u_n(\alpha)}{n} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \alpha\left(u_n(\alpha)-u_{n+1}(\alpha)\right) = \alpha\left(u_1(\alpha)-u_{\mathrm{N}+1}(\alpha)\right).$$

L'équivalent de la question précédente prouve que $u_{\mathrm{N}+1}(\alpha)$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. On en déduit que la série de terme général $u_n(\alpha)/n$ est convergente et que sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n(\alpha)}{n} = \alpha u_1(\alpha).$$

II.1. Soit x dans $]0,+\infty[$. La fonction $g_x : t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Elle est également positive.

Quand t tend vers 0, on voit que $g_x(t)$ est équivalent à t^{x-1}, c'est-à-dire à $1/t^{1-x}$. L'exposant $1-x$ est strictement inférieur à 1 donc l'intégrale $\int_0^1 \mathrm{d}t/t^{1-x}$ est convergente. Le critère des équivalents permet d'en déduire que la fonction g_x est intégrable sur l'intervalle $]0,1]$.

Quand t tend vers $+\infty$, on voit que $t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}$ tend vers 0, si bien que $g_x(t)$ est négligeable devant $1/t^2$. On sait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t/t^2$ est convergente. Le critère de négligeabilité permet d'en déduire que la fonction g_x est intégrable sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

II.2. Soit x dans $]0,+\infty[$. Prenons $a>0$ et $b>a$ (cette fois, il est absolument nécessaire de s'écarter de la borne 0) et effectuons une intégration par parties dans l'intégrale

$$\int_a^b t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On primitive la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ en $t \mapsto t^x/x$ et on dérive la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ en $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$.

$$\int_a^b t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{b^x\mathrm{e}^{-b}}{x} - \frac{a^x\mathrm{e}^{-a}}{x} + \frac{1}{x}\int_a^b t^x\mathrm{e}^{-t}.$$

Quand a tend vers 0, le produit $a^x\mathrm{e}^{-a}$ tend vers 0 car l'exposant x est strictement positif.

Quand b tend vers $+\infty$, le produit $b^x\mathrm{e}^{-b}$ tend vers 0 par croissances comparées. En effectuant successivement ces deux passages à la limite, on obtient

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

II.3. Il suffit ici de prouver la majoration $\mathrm{e}^{-u} \leqslant \frac{1}{1+u}$, ou encore $\mathrm{e}^u \geqslant 1+u$. Définissons donc la fonction

$$\varphi : u \mapsto \mathrm{e}^u - (1+u).$$

Cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$, avec

$$\forall u \geqslant 0, \qquad \varphi'(u) = \mathrm{e}^u - 1 \geqslant 0.$$

La fonction φ est donc croissante sur $[0,+\infty[$. De plus, elle s'annule en 0 donc elle est positive sur $[0,+\infty[$. On obtient

$$\forall u \geqslant 0, \qquad \mathrm{e}^u \geqslant 1+u > 0$$

puis, par passage à l'inverse

$$\forall u \geqslant 0, \qquad \mathrm{e}^{-u} \leqslant \frac{1}{1+u}.$$

On effectue maintenant la substitution $u \leftarrow t^\alpha$, qui donne

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \mathrm{e}^{-t^\alpha} \leqslant \frac{1}{1+t^\alpha}$$

puis on élève à la puissance n (les nombres sont positifs donc le sens de l'inégalité est préservé)

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \mathrm{e}^{-nt^\alpha} \leqslant \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}.$$

En particulier, on en déduit que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-nt^\alpha}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et on obtient l'inégalité

$$u_n(\alpha) \geqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^\alpha} \, \mathrm{d}t.$$

Effectuons dans cette nouvelle intégrale le changement de variable $u = nt^\alpha$. On peut le faire car la fonction

$$t \mapsto nt^\alpha$$

est une bijection de $]0, +\infty[$ strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. On obtient les relations formelles $t = n^{-1/\alpha}u^{1/\alpha}$ puis $\mathrm{d}t = n^{-1/\alpha}(1/\alpha)u^{\frac{1}{\alpha}-1} \, \mathrm{d}u$. Le changement de variable donne

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^\alpha} \, \mathrm{d}t = \frac{n^{-1/\alpha}}{\alpha} \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1} \mathrm{e}^{-u} \, \mathrm{d}u = \frac{n^{-1/\alpha}}{\alpha} \Gamma(1/\alpha).$$

La minoration donne ensuite

$$n^{1/\alpha} u_n(\alpha) \geqslant \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient l'inégalité

$$\mathrm{K}(\alpha) \geqslant \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

II.4. Soit t dans $[b, +\infty[$. On peut écrire

$$(1 + t^\alpha)^n = (1 + t^\alpha)^{n-1} \times (1 + t^\alpha) \geqslant (1 + b^\alpha)^{n-1} \times (1 + t^\alpha) > 0$$

puis

$$\frac{1}{(1 + t^\alpha)^n} \leqslant \frac{1}{(1 + b^\alpha)^{n-1}} \times \frac{1}{1 + t^\alpha}.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_b^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t^\alpha)^n} \leqslant \frac{1}{(1 + b^\alpha)^{n-1}} \int_b^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha}.$$

L'intégrande étant positif, on trouve ensuite

$$\int_b^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha} = u_1(\alpha)$$

puis

$$\int_b^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t^\alpha)^n} \leqslant \frac{1}{(1 + b^\alpha)^{n-1}} u_1(\alpha).$$

II.5. On sait que le quotient $\ln(1 + t^\alpha)/t^\alpha$ tend vers 1 quand t tend vers 0. D'après la définition de la limite, il existe a dans $]0, 1[$ vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in \,]0, a], \qquad 1 - \rho \leqslant \frac{\ln(1 + t^\alpha)}{t^\alpha}.$$

On multiplie par t^α, qui est strictement positif

$$\forall t \in \,]0, a], \qquad (1 - \rho)t^\alpha \leqslant \ln(1 + t^\alpha).$$

Cette inégalité est également valable pour $t = 0$ (elle s'écrit $0 \leqslant 0$). On applique ensuite la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$, qui est décroissante, pour obtenir

$$\forall t \in [0, a], \qquad \exp\left((1 - \rho)t^\alpha\right) \geqslant \frac{1}{1 + t^\alpha}.$$

II.6. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $u = n(1-\rho)t^\alpha$ dans l'intégrale

$$n^{1/\alpha} \int_0^a \exp(-n(1-\rho)t^\alpha)\ \mathrm{d}t.$$

C'est possible car la fonction $t \mapsto n(1-\rho)t^\alpha$ est une bijection de $]0,a]$ sur $]0, n(1-\rho)a^\alpha]$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante. Le calcul formel donne $t = n^{-1/\alpha}(1-\rho)^{-1/\alpha}u^{1/\alpha}$ puis $\mathrm{d}t = n^{-1/\alpha}(1-\rho)^{-1/\alpha}(1/\alpha)u^{\frac{1}{\alpha}-1}\ \mathrm{d}u$. On obtient

$$n^{1/\alpha} \int_0^a \exp(-n(1-\rho)t^\alpha)\ \mathrm{d}t = (1-\rho)^{-1/\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^{n(1-\rho)a^\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u$$

Quand n tend vers $+\infty$, ceci tend vers

$$(1-\rho)^{-1/\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u = (1-\rho)^{-1/\alpha}\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Commençons par appliquer la relation de Chasles

$$n^{1/\alpha}u_n(\alpha) = n^\alpha \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} + n^\alpha \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$$

puis utilisons les majorations des deux questions précédentes

$$n^{1/\alpha}u_n(\alpha) \leqslant n^{1/\alpha}\int_0^a \exp(-n(1-\rho)t^\alpha)\ \mathrm{d}t + \frac{n^{1/\alpha}u_1(\alpha)}{(1+a^\alpha)^{n-1}}.$$

Quand on fait tendre n vers $+\infty$, le quotient $\frac{n^{1/\alpha}u_1(\alpha)}{(1+a^\alpha)^{n-1}}$ tend vers 0 par croissances comparées. On obtient donc

$$\mathrm{K}(\alpha) \leqslant (1-\rho)^{-1/\alpha}\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

II.7. L'inégalité précédente est valable pour tout ρ dans $]0,1[$. On peut donc faire tendre ρ vers 0 et obtenir

$$\mathrm{K}(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

En combinant cette inégalité avec celle de la question II.3, on obtient finalement l'égalité

$$\mathrm{K}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Exercice 2.

1. La fonction $f_1 : t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et se prolonge par continuité en 0 (elle y admet la limite 1).

En particulier, elle est intégrable sur $]0,1]$.

Pour tout t dans $[1,+\infty[$, on remarque les inégalités

$$0 \leqslant f_1(t) \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Comme la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, il en est de même pour la fonction f_1 d'après le critère de domination.

Finalement, la fonction f_1 est intégrable sur $]0,+\infty[$. En particulier, l'intégrale I_1 existe.

La fonction $f_2 : t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Elle aussi admet un prolongement par continuité en 0 (elle y admet la limite $1/2$).

La fonction f_2 est donc intégrable sur $]0,1]$.

Pour tout t dans $[1,+\infty[$, on remarque les inégalités

$$0 \leqslant f_2(t) \leqslant \frac{2}{t^2}.$$

Comme pour f_1, on en déduit que f_2 est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Finalement, la fonction f_2 est intégrable sur $]0,+\infty[$. En particulier, l'intégrale I_2 existe.

Enfin, la fonction $f_3 : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et admet un prolongement par continuité en 0 (elle tend vers 1 en 0). Elle aussi est intégrable sur $]0,1]$.

Prenons maintenant a et b dans $]0,+\infty[$. Dans l'intégrale $\int_a^b f_3(t)\,\mathrm{d}t$, effectuons une intégration par parties. On intègre la fonction $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto 1-\cos(t)$. On dérive la fonction $t \mapsto 1/t$ en $t \mapsto -1/t^2$.

On obtient alors

$$\int_a^b \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

La majoration $\left|\frac{1-\cos(b)}{b}\right| \leqslant \frac{2}{b}$ montre que $\frac{1-\cos(b)}{b}$ tend vers 0 quand b tend vers $+\infty$.

On sait déjà que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ existe. On en déduit que $\int_a^b \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie quand b tend vers $+\infty$. Cela prouve l'existence de l'intégrale I_2 et on trouve

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1-\cos(a)}{a} + \int_a^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, un développement limité donne

$$\frac{1-\cos(a)}{a} = \frac{1-(1+\mathrm{o}(a))}{a} = \underset{a\to 0}{\mathrm{o}}(1).$$

En faisant tendre a vers 0, on obtient donc l'égalité $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_3$.

Remarquons maintenant l'égalité

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $t \mapsto t/2$ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ qui est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. Effectuons le changement de variable $u = t/2$.

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(u)}{4u^2}2\,\mathrm{d}u = \mathrm{I}_1.$$

$\boxed{\text{On a bien montré que les intégrales } \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2 \text{ et } \mathrm{I}_3 \text{ convergent et qu'elles ont la même valeur.}}$

Soit maintenant un entier n. La fonction $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est continue sur $]0,\pi/2]$ et se prolonge par continuité en 0 (elle y possède la limite $2n+1$) donc elle est intégrable sur $]0,\pi/2]$.

$\boxed{\text{L'intégrale } \mathrm{J}_n \text{ existe pour tout entier naturel } n.}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On va appliquer l'identité trigonométrique suivante

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \sin(b) - \sin(a) = 2\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\cos\left(\frac{b+a}{2}\right).$$

On trouve en particulier

$$\forall t \in]0, \pi/2], \qquad \sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t) = 2\sin(t)\cos((2n+2)t)$$

puis

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = 2\int_0^{\pi/2} \cos((2n+2)t)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{2\sin((2n+2)t)}{2n+2}\right]_0^{\pi} = 0.$$

$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc constante, de valeur } \mathrm{J}_0 = \pi/2.}$

---

3. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$.

Vérifions sa continuité en 0.

$$f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)} = \frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2 + \mathrm{o}(x^2)} = \frac{\mathrm{o}(1)}{1 + \mathrm{o}(1)} = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(1).$$

Ce développement limité montre que f admet une limite nulle en 0. La fonction f est donc continue en 0.

Exprimons maintenant la dérivée f' sur $]0, \pi/2]$.

$$\forall x \in]0, \pi/2], \qquad f'(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2\cos(x) + \sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}.$$

Le dénominateur est équivalent à x^4. On va donc développer le numérateur à l'ordre 4.

$$-x^2\cos(x) + \sin^2(x) = -x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right) + \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right)^2 = -x^2 + \frac{x^4}{2} + x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}(x^4) = \frac{x^4}{6} + \mathrm{o}(x^4).$$

En reportant dans l'expression de f', il vient

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{6}x^4 + \mathrm{o}(x^4)}{x^4 + \mathrm{o}(x^4)} = \frac{\frac{1}{6} + \mathrm{o}(1)}{1 + \mathrm{o}(1)}.$$

On en déduit que $f'(x)$ tend vers $1/6$ quand x tend vers 0.

On a prouvé que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$, continue sur $[0, \pi/2]$ et que f' a une limite finie en 0.

$\boxed{\text{D'après le théorème de continuité de la dérivée, la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \pi/2].}$

---

4. Soit p dans $\mathbb{N}^*$. On intègre la fonction $t \mapsto \sin(pt)$ en $t \mapsto -\cos(pt)/p$ et on dérive la fonction f.

$$\mathrm{K}_p = \left[-\frac{\cos(pt)f(t)}{p}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{p}\int_0^{\pi/2} \cos(pt)f'(t)\ \mathrm{d}t.$$

On en déduit en particulier la majoration

$$\begin{aligned}
|\mathrm{K}_p| &\leqslant \frac{|f(0)| + |f(\pi)|}{p} + \frac{1}{p}\left|\int_0^{\pi/2} \cos(pt)f'(t)\ \mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{|f(0)| + |f(\pi)|}{p} + \frac{1}{p}\int_0^{\pi/2} \left|\cos(pt)f'(t)\right|\ \mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{|f(0)| + |f(\pi)|}{p} + \frac{1}{p}\int_0^{\pi/2} \left|f'(t)\right|\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Cette majoration prouve que la suite } (\mathrm{K}_p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 0.}}$

---

5. Soit n dans $\mathbb{N}$. La linéarité de l'intégrale donne

$$\mathrm{K}_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} - \frac{\sin((2n+1)t)}{t} \right) \,\mathrm{d}t = \mathrm{J}_n - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} \,\mathrm{d}t.$$

La fonction $t \mapsto (2n+1)t$ est une bijection de $]0, \pi/2]$ sur $]0, (2n+1)\pi/2]$ qui est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. Le changement de variable $u = (2n+1)t$ donne finalement

$$\mathrm{K}_{2n+1} = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u} \,\mathrm{d}u.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve finalement $\boxed{\mathrm{I}_3 = \pi/2.}$

Exercice 3. a. En toute rigueur, il faudrait commencer par prouver que ces suites sont bien définies et que leurs termes sont tous strictement positifs, mais passons.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, commençons par repérer l'inégalité

$$a_n - b_n = \frac{(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2}{2} \geqslant 0.$$

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On en déduit les inégalités

$$a_{n+1} \leqslant \frac{a_n + a_n}{2} \leqslant a_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} \geqslant \sqrt{b_n \times b_n} = b_n.$$

La suite $(a_n)_{n \neq 1}$ est donc décroissante et la suite $(b_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on connaît maintenant les inégalités

$$a_1 \geqslant a_n \geqslant b_n \geqslant b_1,$$

qui prouvent que ces deux suites sont bornées en plus d'être monotones. Elles sont donc toutes deux convergentes. Notons α et β leurs limites respectives.

Un passage à la limite dans la première relation de récurrence donne

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad \text{donc} \qquad \alpha = \beta.$$

Ainsi, ces deux suites convergent et elles ont la même limite.

---

b. Commençons par justifier l'existence de $\mathrm{T}(x, y)$. Soient x et y dans $]0, +\infty[$. La fonction

$$f : u \mapsto \frac{1}{\sqrt{(x^2 + u^2)(y^2 + u^2)}}$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Quand u tend vers $+\infty$, on observe que $f(u)$ est équivalent à $1/u^2$. La fonction $u \mapsto 1/u^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc f l'est aussi. La fonction f est donc également intégrable sur $[0, +\infty[$.

Enfin, on remarque que la fonction f est paire. On peut conclure qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. L'intégrale $\mathrm{T}(x, y)$ est donc bien définie.

Soient x et y dans $]0, +\infty[$. Définissons sur $]0, +\infty[$ la fonction

$$\varphi : t \mapsto \frac{1}{2} \left(t - \frac{xy}{t} \right).$$

Cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$, strictement croissante (c'est la somme de deux fonctions strictement croissantes) ; elle admet respectivement les limites $-\infty$ et $+\infty$ en 0 et en $+\infty$. Cette fonction est donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

C'est une fonction bijective, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, donc on peut effectuer le changement de variable $u = \varphi(t)$ dans l'intégrale $\mathrm{T}(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy})$.

Le calcul formel donne $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{xy}{t^2}\right)\ \mathrm{d}t$ et (après simplifications)

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + u^2 = \frac{(t^2+x^2)(t^2+y^2)}{4t^2}, \qquad (\sqrt{xy})^2 + u^2 = \frac{(t^2+xy)^2}{4t^2}.$$

Le dénominateur de l'intégrande devient donc

$$\frac{1}{\sqrt{((\frac{x+y}{2})^2+u^2)((\sqrt{xy})^2+u^2))}} = \frac{4t^2}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+y^2)}\,(t^2+xy)}.$$

Le changement de variable donne donc

$$\mathrm{T}\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{4t^2}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+y^2)}\,(t^2+xy)} \times \frac{1}{2}\left(1+\frac{xy}{t^2}\right)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+y^2)}}.$$

L'intégrande étant une fonction paire, cette intégrale se réécrit

$$\mathrm{T}\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+y^2)}} = \mathrm{T}(x,y).$$

---

c. Cette relation prouve que la suite de terme général $\mathrm{T}(a_n, b_n)$ est constante, de valeur $\mathrm{T}(a_0, b_0)$, c'est-à-dire $\mathrm{T}(a,b)$. Il s'agit alors de prouver que $\mathrm{T}(a_n, b_n)$ tend vers $\mathrm{T}(\mathrm{M}(a,b), \mathrm{M}(a,b))$, mais je ne le détaille pas ici car ça utilise le théorème de convergence dominée, que nous n'avons pas encore vu.

Exercice 4. Commençons par justifier que la fonction F est bien définie.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |f(s)|\ \mathrm{d}s$ est convergente. La fonction $t \mapsto t + x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante, donc on peut effectuer le changement de variable $s = t + x$. On en déduit que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |f(t+x)|\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Enfin, pour tout t réel, l'inégalité triangulaire donne

$$|f(t+x) - f(t)| \leqslant |f(t+x)| + |f(t)|,$$

ce qui prouve que la fonction $t \mapsto |f(t+x) - f(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout x, le nombre $\mathrm{F}(x)$ est bien défini.

Prenons maintenant $\varepsilon > 0$. On sait que $\int_y^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$ donc il existe $\mathrm{A} > 0$ tel que

$$\forall y \geqslant \mathrm{A}, \qquad \int_y^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon.$$

De même, il existe $\mathrm{B} > 0$ tel que

$$\forall y \geqslant \mathrm{B}, \qquad \int_{-\infty}^{-y} |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon.$$

Notons $\mathrm{C} = \max(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, de manière à avoir

$$\forall y \geqslant \mathrm{C}, \qquad \int_{-\infty}^{-y} |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon, \qquad \int_y^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon.$$

Prenons maintenant $x \geqslant 2\mathrm{C}$. On observe dans un premier temps la majoration directe

$$\mathrm{F}(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}} (|f(t+x)| + |f(t)|) = \int_{\mathbb{R}} |f(t+x)| \ \mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \ \mathrm{d}t.$$

Le même changement de variable que celui proposé plus haut — dans la suite, j'effectue de pareils changements de variable sans les expliciter — donne $\int_{\mathbb{R}} |f(t+x)| \ \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \ \mathrm{d}t$ donc

$$\mathrm{F}(x) \leqslant 2 \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \ \mathrm{d}t.$$

Maintenant, décomposons l'intégrale par la relation de Chasles

$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{-\mathrm{C}-x} |f(x+t) - f(t)| \ \mathrm{d}t + \int_{-\mathrm{C}-x}^{\mathrm{C}-x} |f(x+t) - f(t)| \ \mathrm{d}t + \int_{\mathrm{C}-x}^{-\mathrm{C}} |f(x+t) - f(t)| \ \mathrm{d}t + \int_{-\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} |f(x+t) - f(t)| \ \mathrm{d}t + \int_{\mathrm{C}}^{+\infty} |f($$

L'hypothèse $x \geqslant 2\mathrm{C}$ donne $\mathrm{C} - x \leqslant -\mathrm{C}$ donc toutes les intégrales écrites ci-dessus sont positives. On en déduit la minoration

$$\mathrm{F}(x) \geqslant \int_{-\mathrm{C}-x}^{\mathrm{C}-x} |f(x+t) - f(t)| \ \mathrm{d}t + \int_{-\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} |f(x+t) - f(t)| \ \mathrm{d}t.$$

Il reste à minorer chacune de ces deux intégrales. Pour cela, utilisons l'inégalité triangulaire dans sa version minorante.

$$\int_{-\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} |f(x+t) - f(t)| \ \mathrm{d}t \geqslant \int_{-\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} (|f(t)| - |f(x+t)|) \ \ \mathrm{d}t = \int_{-\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} |f(t)| \ \mathrm{d}t - \int_{-\mathrm{C}+x}^{\mathrm{C}+x} |f(u)| \ \mathrm{d}u.$$

Remarquons l'inégalité $-\mathrm{C} + x \geqslant \mathrm{C}$, qui donne ensuite

$$\int_{-\mathrm{C}+x}^{\mathrm{C}+x} |f(u)| \ \mathrm{d}u \leqslant \int_{-\mathrm{C}+x}^{+\infty} |f(u)| \ \mathrm{d}u \leqslant \varepsilon.$$

On connaît aussi l'inégalité

$$\int_{-\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} |f(t)| \ \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \ \mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{-\mathrm{C}} |f(t)| \ \mathrm{d}t - \int_{\mathrm{C}}^{+\infty} |f(t)| \ \mathrm{d}t \geqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \ \mathrm{d}t - 2\varepsilon,$$

ce qui donne

$$\int_{-\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} |f(x+t) - f(t)| \ \mathrm{d}t \geqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \ \mathrm{d}t - 3\varepsilon.$$

Un calcul semblable donne

$$\int_{-\mathrm{C}-x}^{\mathrm{C}-x} |f(x+t) - f(t)| \ \mathrm{d}t \geqslant \int_{-\mathrm{C}-x}^{\mathrm{C}-x} (|f(x+t)| - |f(t)|) \ \ \mathrm{d}t = \int_{-\mathrm{C}}^{\mathrm{C}} |f(u)| \ \mathrm{d}u - \int_{-\mathrm{C}-x}^{\mathrm{C}-x} |f(t)| \ \mathrm{d}t \geqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \ \mathrm{d}t - 3\varepsilon.$$

On obtient donc la minoration $\mathrm{F}(x) \geqslant 2 \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \ \mathrm{d}t - 6\varepsilon$.

Plus précisément, on a démontré ceci

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \mathrm{D} > 0, \quad \forall x \geqslant \mathrm{D}, \qquad 2 \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \ \mathrm{d}t - 6\varepsilon \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant 2 \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \ \mathrm{d}t.$$

On a prouvé que $\mathrm{F}(x)$ tend vers $2 \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)| \ \mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.