

Montrer que card $\left\{ x \in [1, n] ; |\nu(x) - \ln(\ln n)| \geq a_n \sqrt{\ln(\ln n)} \right\} = o(n).$

Ecoles Normales Supérieures - PSI

Algèbre

191. [S] Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, annulé par un polynôme Q tel que $Q(0) = 0$ et $Q'(0) \neq 0$. Montrer que $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont supplémentaires.

192. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et les autres valeurs 1 ou -1. Montrer que si n est pair alors A est inversible.

b) Soit $B = (x_1, \dots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. On suppose que, pour toute partie P de B cardinal $2n$, on peut trouver Q_1 et Q_2 contenues dans P , chacune de cardinal n , telles que $\sum_{x \in Q_1} x = \sum_{x \in Q_2} x$. Montrer que tous les x_i sont égaux.

193. Soient E un \mathbb{C} espace vectoriel de dimension finie n , $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\forall g \in \mathcal{L}(E)$ $\varphi_f(g) = f \circ g - g \circ f$.

a) Calculer $\varphi_f^n(g)$ pour $g \in \mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que $f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = \sum_{k=0}^n f^k(f \circ g - g \circ f) f^{n-k}$.

c) On suppose f non inversible. Montrer que f est nilpotente si et seulement si φ_f l'est. d) Montrer que, si f possède une unique valeur propre, alors φ_f est nilpotente. Étudier réciproque.

194. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $c_0, c_1, \dots, c_{2n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $c_n = 1$ et $c_{n+1} = \dots = c_{2n-1} = 0$. Soit

$$Q = \sum_{k=0}^n c_k X^k. \text{ On définit les matrices } A, B, P \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ par}$$

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+1=j \\ -c_{i-1} & \text{si } j=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad b_{i,j} = c_{i+j-1} \quad \text{et} \quad p_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j-1=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que $Q(A) = 0$ en calculant $A^k e_1$ où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$.
b) Soit $R(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; \exists P \in \mathbb{R}[X], P(A) = M\}$. Montrer que $R(A)$ est de dimension n .

c) Montrer que P_B est triangulaire puis en déduire que B est inversible.

d) Montrer que $AB = BA^T$.

e) Montrer que A^T est semblable à A .

f) Montrer que A s'écrit comme le produit de deux matrices symétriques.

195. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que, pour tout polynôme P à coefficients complexes, la matrice $P(A)$ est diagonalisable.

de probabilité. On note
ore de points fixes d'une

(\dots, X_n) .

res suivant toutes la loi
 $1 = S_n + X_{n+1}$.

n tend vers $+\infty$.

and n tend vers $+\infty$.
(ω) $\geq n$. Déterminer

$(T^{n-2} = k - 1)$.

$G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ et $S =$
ordonnées sont nulles
nue et X une variable

$(s))$.

ers inférieurs ou égaux
 $|x\}$ et on note $\nu(x)$ le

suivant la loi uniforme

$\left(\frac{1}{n} \right) + o\left(\frac{1}{n} \right)$.

(a_n) une suite à termes