

400. Soit $n \geq 3$ un entier. Si $k \in \mathbb{Z}$, on note \bar{k} la réduction de k modulo n . Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telles que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_k suit la loi uniforme sur $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Soit F l'application aléatoire de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $F(\bar{k}) = \bar{k} + X_k$. Calculer la probabilité que F soit bijective.

401. On cherche à collectionner N jouets. À chaque achat, chaque jouet a une probabilité uniforme d'être obtenu. Pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on note T_i le temps d'attente pour obtenir i jouets différents.

a) Calculer l'espérance de T_N .

b) Calculer la variance de T_N .

c) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P} \left(\left| \frac{T_N}{N \ln N} - 1 \right| \geq \varepsilon \right) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$.

402. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles centrées. On suppose que $\mathbb{E}(X_1^4) < +\infty$.

a) Montrer que $\mathbb{E}((X_1 + \dots + X_n)^4) = O(n^2)$.

b) Pour $\varepsilon > 0$, quelle est la nature de la série de terme général $\mathbb{P} \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} > \varepsilon \right)$?

403. Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{P}(x)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $S_n = \sum_{k=1}^n X_k, T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n \geq x) dx = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \frac{1}{n!}$.

b) On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(T_n \geq x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$. Retrouver la formule de Stirling.

École Polytechnique - PSI

Algèbre

404. Pour $n \geq 2$ on pose $P_n = (X+1)^n + X^n + 1$ et $Q(X) = (X^2 + X + 1)^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que Q divise P .

405. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de projecteurs.

406. Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n , f un endomorphisme de E diagonalisable. Montrer que f possède n valeurs propres distinctes si et seulement s'il existe $v \in E$ tel que $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ soit libre.

407. Trouver $\text{Vect}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

408. a)
b) Trou

409. So
a) A-t-
b) Trou

Analyse

410. *
[a, b[.

411. a)
seuleme
b) Mon

412. So
 $a_{n+1} =$
asympto

413. Ét

414. *
 $+\infty$.
Montrer

415. Tro
 $f(x)f(y)$

416. Po

Déterm

417. So

On pose
sont tro
tangent
Calcule

Géomé

Géométrie

417. Soient a, b, c trois réels strictement positifs. On pose $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \left(\frac{a}{x} \right)^2 + \left(\frac{b}{y} \right)^2 + \left(\frac{c}{z} \right)^2 = 1 \right\}$. On suppose que A, B, C sont trois points distincts de E tels que le plan tangent à E en A est parallèle à (BC) , le plan tangent à E en B est parallèle à (CA) , le plan tangent à E en C est parallèle à (AB) . Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

416. Pour $a \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n(a) = \int_0^1 \frac{1 + (at) + \dots + (at)^n}{1} dt$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a)$ et $\lim_{a \rightarrow 1} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a) \right)$.

415. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotones telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = f(x)f(y)$.

Montrer que $\sum \frac{f(n)}{1}$ converge si et seulement si $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge.

414. ★ Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ de classe C^1 , strictement croissante avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

413. Étudier la série $\sum (-1)^n \frac{n}{\sin(\ln(n))}$.

412. Soit $\alpha > 0$. Soient $(a_n), (b_n)$ et (c_n) trois suites réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{\alpha}(b_n + c_n), b_{n+1} = \frac{\alpha}{1}(a_n + c_n), c_{n+1} = \frac{\alpha}{1}(a_n + b_n)$. Étudier leur comportement asymptotique.

411. a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire, avec $n \geq 2$. Montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^{\deg P}$.

b) Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ triangonalisables dans \mathbb{R} est un fermé.

410. ★ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Montrer qu'il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\sqrt{n} - \sqrt{m} \in]a, b[$.

Analyse

409. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $A^2 \in S_n(\mathbb{R})$.

a) A-t-on nécessairement $A \in S_n(\mathbb{R})$?

b) Trouver une condition nécessaire d'égalité lorsque $A \in S_{n+}^+(\mathbb{R})$.

408. a) Soit $(A, B) \in S_n^+(\mathbb{R})^2$. Montrer que $\det(A+B) \geq \max(\det(A), \det(B))$.

418. Soient abc un vrai triangle du plan complexe, α (resp. β , resp. γ) a rotation de centre a (resp. b , resp. c) et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) Montrer que le centre de $\alpha \circ \beta$ appartient à l'intersection des trisectrices du triangles.

b) Montrer que $\alpha^3 \circ \beta^3 \circ \gamma^3$ est l'identité du plan.

c) Montrer que les points d'intersection des trisectrices forment un triangle équilatéral.

Probabilités

419. Déterminer la loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que $\forall (k, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathbf{P}(X > k + \ell | X > k) = \mathbf{P}(X > \ell)$.

420. Une entreprise qui commercialise des œufs en chocolat met dans chaque œuf un jouet. Au total il y a N jouets différents. On suppose qu'à chaque achat d'œuf la probabilité de tomber sur un jouet donné est identique pour chaque jouet. On note T_N le nombre d'œufs achetés jusqu'à obtenir la collection complète.

Montrer que $\mathbf{E}(T_N) = N \times H_N$ avec $H_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$.

421. On pose $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$ avec a, b, c, d des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{Z} telles que $a+1, b+1, c+1, d+1$ suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_d$. Calculer la probabilité de l'événement « M est inversible ».

422. On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ qui suivent la même loi. Trouver les lois de X possibles pour que $X + Y$ suive la loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$.

423. On dispose de n objets différents. On effectue des tirages aléatoires indépendants avec remise. On note N_n le nombre de tirages qu'il a fallu pour avoir les n objets différents.

a) Calculer $\mathbf{E}(N_n)$ et $\mathbf{V}(N_n)$.

c) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{N_n}{n \ln(n)} - 1 \right| > \varepsilon \right) = 0$.

École Polytechnique - ESPCI - PC

Algèbre

424. ★ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ tels que

$$n = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k k^2.$$