

Soit  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est unipotente si  $U - I_n$  est nilpotente. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On existe un unique couple  $(D_0, N_0)$  avec  $D_0$  diagonalisable et  $N_0$  nilpotente tel  $A = D_0 + N_0$  et  $D_0 N_0 = N_0 D_0$ .

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  unipotente.

Soit  $\text{Sp}(U) = \{1\}$ .

$U^{-1}$  en fonction de  $N = U - I_n$ .

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer que  $D_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $N_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .

Soit  $D_0 \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .

qu'il existe un unique couple  $(D, U)$  tel que  $A = DU$ ,  $DU = UD$  et  $D$  diagonalisable.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer que  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on pose  $[A, B] = AB - BA$ .

$\mathcal{S} = \{[A, B], (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2\}$

$\mathcal{S}$ , montrer que  $\text{Tr}(M) = 0$ .

Montrer que  $\mathcal{S}$  est stable par multiplication par un scalaire.

Montrer que  $\mathcal{S}$  est stable par similitude.

Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

$D = \text{Diag}(1, 2, \dots, n)$  et  $\mathcal{N}$  l'ensemble des matrices de diagonale nulle. Montrer

l'application  $M \mapsto [D, M]$  est un automorphisme de  $\mathcal{N}$ .

Montrer que  $\mathcal{N} = \mathcal{S}$ .

$B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ .

Montrer que si  $B$  est diagonalisable alors  $e^B$  l'est aussi.

$A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$  diagonalisable ayant  $n$  valeurs propres distinctes  $\mu_1, \dots, \mu_n$ .

Montrer qu'il existe  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $\forall 1 \leq j \leq n, Q(\mu_j) = e^{\mu_j}$ .

Montrer que  $Q(A) = e^A$ .

Considère  $\exp : \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow e^{\mathcal{M}}$ .

$C = \text{Diag}(-1, -2, \dots, -d)$ . Pourquoi est-elle inversible?

Montrer que, si  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ , alors  $e^\lambda \in \text{Sp}(e^M)$ .

Montrer qu'il n'existe pas de matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $C = e^M$ .

Qu'en dit-on de  $\exp$ ?

Considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  par :  $f(X) = \frac{1}{2} X^T A X - B^T X$  où

168. Soit

Montrer q

169. Soit

$\mathbb{B}_d(\mathbb{R})$  l'e

à coeffici

On note  $\mathbb{B}$

de la form

a) i) Mo

ii) Mont

b) i) Mo

ii) Mont

On adme

existe un

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$

c) Soit  $q$

que celui

d) i) Soit

ii) Soit

l'existen

On note

iii) Mon

iv) Mon

les valeu

170. On

si  $\forall \varepsilon >$

On adm

a) Mon

b) On

168. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose  $\|M\|_\infty = \sup_{X \neq 0, X \in \mathbb{R}^n} \frac{\|MX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$ .  
Montrer que  $\|M\|_\infty = \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j=1}^n |m_{i,j}|$ .

169. Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ . On se place dans  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire canonique. On note  $\mathcal{B}_d(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices bistochastiques, c'est-à-dire des matrices  $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$  à coefficients dans  $[0, 1]$  telles que :  $\forall i \in [1, d], \sum_{j=1}^d p_{i,j} = 1$  et  $\forall j \in [1, d], \sum_{i=1}^d p_{i,j} = 1$ .  
On note  $\mathbb{P}_d(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de permutation, c'est-à-dire des matrices de  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  de la forme  $(\delta_{\sigma(i),j})_{1 \leq i,j \leq n}$  où  $\sigma \in S_n$ .  
a) i) Montrer que  $\mathcal{B}_d(\mathbb{R})$  est convexe. Est-ce un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  ?  
ii) Montrer que  $\mathcal{B}_d(\mathbb{R})$  est borné et fermé.  
b) i) Montrer que  $\mathbb{P}_d(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}_d(\mathbb{R})$ .  
ii) Montrer que  $\mathbb{P}_d(\mathbb{R})$  est fermé.

On admet le *théorème de Birkhoff* : La matrice  $P$  appartient à  $\mathbb{P}_d(\mathbb{R})$  si et seulement s'il existe un entier naturel  $m \leq (d-1)^2 + 1$ , des matrices  $P_1, \dots, P_m$  dans  $\mathbb{P}_d(\mathbb{R})$  et des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  positifs de somme 1 tels que  $P = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i$ .  
c) Soit  $\phi$  une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\phi$  admet un minimum sur  $\mathbb{P}_d(\mathbb{R})$ , et que celui-ci est atteint sur  $\mathbb{P}_d(\mathbb{R})$ .

d) i) Soient  $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  et  $P, Q \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\|QMP\| = \|M\|$ .  
ii) Soient  $A, B \in S_d(\mathbb{R})$  orthosémissibles aux matrices diagonales  $D_A$  et  $D_B$ . Montrer l'existence de  $P \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$  telle que  $\|A - B\| = \|D_A P - P D_B\|$ .  
On note  $R = (p_{i,j}^2)_{1 \leq i,j \leq d}$ .  
iii) Montrer que  $R \in \mathbb{B}_d(\mathbb{R})$ .  
iv) Montrer que  $\|A - B\|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq d} r_{i,j} |\lambda_i(A) - \lambda_j(B)|^2$  où les  $\lambda_i(A)$  (resp.  $\lambda_i(B)$ ) sont les valeurs propres de  $A$  (resp.  $B$ ).

170. On dit qu'une suite  $(u_n)$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est de Cauchy si  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m, n \geq N \Rightarrow \|u_n - u_m\| \leq \epsilon$ .  
On admet qu'une suite réelle est de Cauchy si et seulement si elle est convergente.

a) Montrer qu'une suite complexe est de Cauchy si et seulement si elle converge.  
b) On se place dans l'espace  $\ell^2(\mathbb{C})$  des suites complexes  $(u_n)$  telles que  $\sum |u_n|^2$  converge. Si  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$  on pose  $\|u\|_2 = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 \right)^{1/2}$ .  
Montrer qu'une suite à valeurs dans  $\ell^2(\mathbb{C})$  est de Cauchy (au sens de  $\|\cdot\|_2$ ) si et seulement si elle converge.

171. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $\omega_n = e^{2i\pi/n}$ .

On définit une application  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  en posant, pour  $v = (v_1 \dots v_n)^T$ ,  $\mathcal{F}(v) = (\zeta_1 \dots \zeta_n)^T$  où, pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\zeta_k = \sum_{j=1}^n v_j \omega_n^{(k-1)(j-1)}$ .

- a) Montrer que  $\mathcal{F}$  est linéaire et donner sa matrice  $A$  dans la base canonique.  
b) Calculer  $\overline{A}^T A$  et déterminer  $\mathcal{F}^{-1}$ .

c) Pour  $v = (v_1 \dots v_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ , on pose  $\|v\|_2 = \left( \sum_{k=1}^n |v_k|^2 \right)^{1/2}$ .

Montrer que  $\|\mathcal{F}(v)\|_2 = \sqrt{n} \|v\|_2$ .

172. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose  $\|M\|_2 = \sup_{X \neq 0, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \frac{|MX|_2}{|X|_2}$  et  $k(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$

si  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

a) Rappeler la définition de la norme euclidienne  $|\cdot|_2$  et montrer que  $\|M\|_2 = \sup_{|X|_2=1} |MX|_2$ .

b) Montrer que  $\|\cdot\|_2$  est une norme et que  $\forall M_1, M_2, \|M_1 M_2\|_2 \leq \|M_1\|_2 \|M_2\|_2$ .

c) Montrer qu'il existe un vecteur non nul  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $|MX|_2 = \|M\|_2 |X|_2$ .

d) Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

e) Soient  $\sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_n$ , les valeurs propres de  $A^T A$ . Montrer que  $k(A) = \sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma_1}}$ .

f) On suppose  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Calculer  $\|A\|_2$  et en déduire  $k(A)$ .

g) Montrer que  $k(A) = 1$  si et seulement s'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  et  $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  tels que  $A = \alpha Q$ .

173. On se place dans  $\mathbb{R}^n$  muni de sa norme euclidienne canonique. Pour toute partie  $A$  non vide bornée on définit le diamètre de  $A$  par  $d(A) = \sup\{\|x - y\|, (x, y) \in A^2\}$ .  
Soit  $X$  une partie bornée. Pour  $\rho > 0$  on définit un  $\rho$ -recouvrement de  $X$  comme une famille  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dénombrable de parties bornées telle que  $X \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  et  $\forall k \in \mathbb{N} : d(A_k) \leq \rho$ .

On définit, pour  $s \geq 0$  :

$$H_s^\rho(X) = \inf \left\{ \sum_{k \geq 0} d(A_k)^s, (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ } \rho\text{-recouvrement de } X \right\}.$$

a) Montrer que  $H_s^\rho(X)$  est fini et qu'il est décroissant en  $\rho$ .

b) Montrer que  $H_s(X) = \sup_{\rho > 0} (H_s^\rho(X)) = \lim_{\rho \rightarrow 0} (H_s^\rho(X))$  est décroissante par rapport à  $s$ .

c) Calculer  $H_0(X)$  et  $H_s(X)$  pour  $s > n$ .

d) Pour  $X$  partie bornée et  $v$  vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , comparer  $H_s(X + v)$  et  $H_s(X)$ .

e) Pour  $\lambda > 0$ , comparer  $H_s(\lambda X)$  et  $H_s(X)$ .

f) Soient  $X$  et  $Y$  deux parties bornées telles que  $\inf_{x \in X, y \in Y} \|x - y\| > 0$ .

Montrer que  $H_s(X \cup Y) = H_s(X) + H_s(Y)$ .

g) Soit  $s \geq 0$ . Montrer que si  $H_s(X) < +\infty$  alors  $H_t(X) = 0$  pour tout  $t > s$ .

h) Soit  $s \geq 0$ . Montrer que si  $H_s(X) > 0$  alors  $H_t(X) = +\infty$  pour tout  $t < s$ .

174. Pour  $f \in \mathcal{C}^3([-1, 1], \mathbb{R})$  et  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}$ , on note

$$I_{app}(f) = w_1 f(-2/3) + w_2 f(0) + w_3 f(2/3)$$

a) Déterminer  $w_1, w_2, w_3$  de sorte que  $I_{app}(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$  pour tout  $f \in \mathcal{C}^3([-1, 1], \mathbb{R})$ .

On prendra ces valeurs de  $w_1, w_2, w_3$ .

b) A-t-on toujours  $I_{app}(P) = \int_{-1}^1 P(x) dx$  pour tout polynôme  $P$  de degré  $\leq 2$ ?

c) Soient  $f \in \mathcal{C}^3([-1, 1], \mathbb{R})$ ,  $f(2/3) = P(2/3)$ .

Montrer que  $\|f - P\|_{\infty, [-1, 1]} \leq \frac{1}{24} \|f'''\|_{\infty, [-1, 1]}$ .

Ind. Considérer l'application  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\phi(t) = \int_{-1}^1 f(x) dx - I_{app}(f)$ .

$x \notin \{-2/3, 0, 2/3\}$ .

d) En déduire une majoration de  $\|f - P\|_{\infty, [-1, 1]}$  en fonction de  $\|f'''\|_{\infty, [-1, 1]}$ .

175. Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  continue et croissante.

a) Montrer que  $g$  est prolongeable en une fonction continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

b) Montrer que  $g^2$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

c) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Discuter de l'optimalité de la constante.

176. a) Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . Soit  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  définie par  $\varphi_0 = \varphi$  et  $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ \varphi$ . Soit  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  définie par  $\varphi_0 = \varphi$  et  $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ \varphi$ .

b) Soit  $P : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction polynomiale à coefficients réels.

177. a) Existe-t-il une fonction continue  $f$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(x) = o(g(x))$  quand  $x \rightarrow +\infty$ ?

b) Donner le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ .

c) Existe-t-il une fonction continue  $f$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(x) = o(g(x))$  quand  $x \rightarrow +\infty$ ?

d) Une fonction est dite absolument continue si elle admet une dérivée presque partout et si ses coefficients positifs sur  $\mathbb{R}^+$  sont finis.

178. a) Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Démontrer que  $P$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\deg(P) \leq -2$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = 0$ .

b) Soit  $F$  une fraction rationnelle. Montrer que  $F$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\deg(F) \leq -2$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 0$ .

$$I_{app}(f) = w_1 f(-2/3) + w_2 f(0) + w_3 f(2/3).$$

a) Déterminer  $w_1, w_2, w_3$  de sorte que  $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], I_{app}(P) = \int_{-1}^1 P$ .

On prendra ces valeurs de  $w_1, w_2, w_3$  dans toute la suite.

b) A-t-on toujours  $I_{app}(P) = \int_{-1}^1 P$  pour  $\deg(P) \geq 3$ ?

c) Soient  $f \in \mathcal{C}^3([-1, 1], \mathbb{R})$  et  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  tel que  $f(-2/3) = P(-2/3), f(0) = P(0)$  et  $f(2/3) = P(2/3)$ .  
Montrer que  $\|f - P\|_{\infty, [-1, 1]} \leq C \|f^{(3)}\|_{\infty, [-1, 1]}$  où  $C = \frac{1}{6} \sup_{x \in [-1, 1]} |x(x + 2/3)(x - 2/3)|$ .

Ind. Considérer l'application  $t \mapsto f(t) - P(t) - (f(x) - P(x)) \frac{(t + 2/3)t(t - 2/3)}{(x + 2/3)x(x - 2/3)}$  pour  $x \notin \{-2/3, 0, 2/3\}$ .

d) En déduire une majoration de  $\left| I_{app}(f) - \int_{-1}^1 f \right|$  en fonction de  $\|f^{(3)}\|_{\infty, [-1, 1]}$ .

175. Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  carré intégrable. Pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose  $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

a) Montrer que  $g$  est prolongeable en une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$ .  
b) Montrer que  $g^2$  est intégrable et que  $\int_0^{+\infty} g^2(t) dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f_2(t) dt$ .

c) Rappel l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la condition nécessaire et suffisante d'égalité. Discuter de l'optimalité de la constante 4.

176. a) Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $0 < a < b < 1, I = [a, b]$  et  $\varphi : x \in I \mapsto 2x(1 - x)$ . Soit  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  définie par  $\varphi_0 = \varphi$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_{n+1} = \varphi \circ \varphi_n$ . Etudier la convergence sur  $I$  de la suite de fonctions  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ .

b) Soit  $P : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction polynomiale. Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales à coefficients entiers qui converge uniformément vers  $P$  sur  $I$ .

177. a) Existe-t-il une fonction  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que pour toute fonction  $f$  polynomiale on ait  $f(x) = o(g(x))$  ?

b) Donner le rayon de convergence de la série entière  $\sum n! z^n$

c) Existe-t-il une fonction  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que, pour toute fonction  $f$  développable en série entière,  $f(x) = o(g(x))$  ?

d) Une fonction est dite analytique si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de son domaine de définition. Montrer que, si  $f$  est limite simple de polynômes à coefficients positifs sur  $\mathbb{R}_+$ , alors elle est analytique sur  $\mathbb{R}_+$ .

178. a) Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $t \mapsto |P(t)|^{-1/2}$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

b) Soit  $F$  une fraction rationnelle complexe. Montrer que  $F$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\deg(F) \leq -2$  et  $F$  n'a pas de pôle réel.



On écrit alors  $F(X) = \sum_{x \in \mathbb{C}} \left( \frac{a_{x,n_x}}{(X-x)^{n_x}} + \dots + \frac{a_{x,1}}{X-x} \right)$ , où les  $a_{x,j}$  sont dans  $\mathbb{C}$ .

Montrer que  $\int_{\mathbb{R}} F(t) dt = i\pi \sum_{x \in \mathbb{C}} \xi(x) a_{x,1}$  où  $\xi(x)$  désigne le signe de  $\text{Im}(x)$ .

Soit  $P$  un polynôme complexe non constant. En étudiant la fonction  $F: r \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{dt}{P(re^{it})}$ , démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss.

179. On munit  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire canonique noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On considère  $Q$  ensemble des fonctions  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

- $\forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y \in \mathbb{R}^n, f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max(f(x), f(y))$
- a) Pour  $n = 1$ , trouver une fonction  $f \in Q$  autre qu'une fonction affine.
- b) i) On fixe  $x, h \in \mathbb{R}^n$ . On pose, pour  $t \in \mathbb{R}, g(t) = f(x + th) - f(x)$ . Exprimer  $g'(t)$ .
- ii) Montrer que  $f \in Q$  si et seulement si, pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$  tels que  $f(y) \leq f(x)$ , on a  $\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq 0$ .
- c) i) Pour  $f \in Q$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , on pose  $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f(x + th) - f(x)$ . Calculer  $g''(0)$ .
- ii) On suppose  $\langle \nabla f(x), h \rangle = 0$ . Que dire du signe de  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j$  ?

## Probabilités

180. Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On note  $G$  sa série génératrice et  $R$  le rayon de convergence de  $G$ .

- a) Justifier que  $R \geq 1$ .
- b) Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , telle que  $(G_{X_n})_{n \geq 1}$  converge simplement sur  $] -R, R[$  vers une fonction notée  $G$ . La fonction  $G$  est-elle nécessairement la série génératrice d'une variable aléatoire ?

181. On considère un dé équilibré cubique. On note  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre obtenu à un lancer. Donner sa série génératrice.

- a) On note  $Y$  la variable aléatoire qui correspond à la somme des lancers de deux dés cubiques équilibrés. Donner sa série génératrice.
- b) Est-il possible de truquer le dé utilisé de sorte que  $Y$  suive la loi uniforme sur  $[2, 12]$  ?

182. Soit  $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toute la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

- a) On note  $U = \min \{k \in \mathbb{N}^*, Z_k = 0\} \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ .
  - i) Déterminer  $P(U > k)$  et  $P(U = k)$ .
  - ii) En déduire  $P(U = +\infty)$ .
  - iii) Donner  $E(U)$  et  $V(U)$ .
- b) On définit  $V = \min \{k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, Z_{k-1} = Z_k = 1\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ .
  - i) Déterminer  $P(V = k)$  pour  $k = 1, 2, 3, 4$ .
  - ii) Montrer que  $P(V > n) \leq P(V > n-2)p(2-p)$ .
  - iii) En déduire  $P(V = +\infty)$ .

- iv) Trouver une relation.
- v) Montrer que  $V$  est

183. On munit  $\Omega = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  de la tribu  $\mathcal{F}$  engendrée par les  $X_i$ .

- pour  $i \neq j, X_i$  et  $X_j$  sont indépendantes.
- pour tout  $i, X_i(\Omega) = \mathbb{C}$ .
- pour tout  $i, E(X_i) = 0$ .

Pour tout  $i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ , on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique de  $\mathbb{C}^n$ .

- a) On se donne une suite  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de complexés, les  $\alpha_i$  étant deux à deux distincts.

i) Montrer que  $E(Z) = 0$ .

ii) Montrer qu'il existe une

$$\sum_{k=1}^m P(Z = \alpha_k) \beta_k = 0$$

iii) En déduire qu'il existe une

$Q(Z) \neq 0, E(Q(Z)) = 0$ .

- b) Montrer que, pour tout

c) En déduire que  $\sum_{k=1}^m \beta_k = 0$ .

d) Montrer que, pour tout

184. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $V(X) = V(Y) = 1$ .

- a) Énoncer les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Hölder.
- b) Montrer que  $\forall t \in \mathbb{R}, E(e^{itX}) = E(e^{itY})$ .

c) i) Soit  $\lambda > 0$ . Montrer que

ii) Montrer que  $2(1 - \cos \lambda) \leq E(e^{i\lambda X}) \leq 2(1 - \cos \lambda)$ .

iii) Montrer que  $P(|X| \leq 1) \geq \frac{1}{2}$ .

iv) Montrer que l'inégalité

d) Pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , on a

185. Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

- a) On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

b) Montrer que, pour tout

c) Montrer que, pour tout

pour tout  $s \in \mathbb{R}^{++}, P(X_1 \leq s)$

d) Montrer que  $\forall s \in \mathbb{R}, P(X_1 \leq s) = P(X_2 \leq s)$ .

iv) Trouver une relation de récurrence linéaire vérifiée par la suite  $(P(V = k))$ .  
 v) Montrer que  $V$  est d'espérance finie et calculer  $E(V)$ .

183. On munit  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  de la distribution uniforme de probabilité.

On se donne  $X_1, \dots, X_{n-1}$  des variables aléatoires réelles telles que :

- pour  $i \neq j$ ,  $X_i$  et  $X_j$  sont indépendantes.

- pour tout  $i$ ,  $X_i(\Omega)$  est de cardinal au moins 2.

- pour tout  $i$ ,  $E(X_i) = 0$  et  $V(X_i) = 1$ .

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , on pose  $x_i = (X_i(\omega_1), \dots, X_i(\omega_n))$  et on note  $x_n = (1, \dots, 1)$ . On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$ .

a) On se donne une variable aléatoire  $Z$  à valeurs discrètes et on note  $Z(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ , les  $\alpha_i$  étant deux à deux distincts. On suppose  $m \geq 3$ .

i) Montrer que  $E(Z) = \frac{1}{n} \langle z, x_n \rangle$  où  $z = (Z(\omega_1), \dots, Z(\omega_n))$ .

ii) Montrer qu'il existe  $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$  non tous nuls tels que :

$$\sum_{k=1}^m P(Z = \alpha_k) \beta_k = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^m P(Z = \alpha_k) \beta_k \alpha_k = 0$$

iii) En déduire qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}^{m-1}[X]$  tel que :

$$Q(Z) \neq 0, E(Q(Z)) = 0 \text{ et } E(Q(Z)Z) = 0.$$

b) Montrer que, pour  $(i, j) \in \{1, \dots, n-1\}^2$ ,  $\langle x_i, x_j \rangle = n\delta_{i,j}$ .

c) En déduire que  $\sum_{k=1}^{n-1} X_k^2 = n - 1$ .

d) Montrer que, pour tout  $i$  entre 1 et  $n-1$ , on a  $E(X_i^3) = 0$ .

184. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles discrètes telles que  $E(X) = E(Y) = 0$

et  $V(X) = V(Y) = 1$ . On pose  $\rho = E(XY)$ .

a) Enoncer les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

b) Montrer que  $\forall t \in [-1, 1]$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x^2 + y^2 - 2txy \geq (1 - t^2) \max(x^2, y^2)$ .

c) i) Soit  $\lambda > 0$ . Montrer que  $P(|X| \geq \lambda \text{ ou } |Y| \geq \lambda) \leq \frac{\lambda^2}{2}$ .

ii) Montrer que  $2(1 - \rho) \geq (1 - t^2) \lambda^2 P(|X| \geq \lambda \text{ ou } |Y| \geq \lambda)$ .

iii) Montrer que  $P(|X| \geq \lambda \text{ ou } |Y| \geq \lambda) \leq \frac{\lambda^2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}$ .

iv) Montrer que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en est une conséquence.

d) Pour  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2$ , donner une majoration de  $P(|X| \geq \alpha \text{ ou } |Y| \geq \beta)$ .

185. Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Rademacher. On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Déterminer la loi, l'espérance et la variance de  $S_n$ .

b) Montrer que, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a  $P(S_n \geq na) \leq \frac{na^2}{2}$ .

c) Montrer que, pour toute variable aléatoire à valeurs réelles  $X$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et pour tout  $s \in \mathbb{R}^+$  :  $P(X \geq a) \leq \frac{E(e^{sX})}{e^{sa}}$ .

d) Montrer que  $\forall s \in \mathbb{R}^+$ ,  $P(S_n \geq na) \leq \left( \frac{ch(s)}{e^{sa}} \right)^n$ .

Épreuves orales: Écoles Normales Supérieures - PC

montrer que :  $\forall s \in \mathbb{R}, \text{ch}(s) \leq e^{s^2/2}$ .  
 déduire que :  $P(S_n \geq na) \leq e^{-na^2/2}$ .

Soit  $a < 0 < b$  des nombres réels. On pose  $f : x \mapsto \frac{ax}{b-a} + \ln \left( 1 + \frac{a(1-e^x)}{b-a} \right)$ .  
 Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de  $f$  et montrer :  $\forall x \in D, 0 \leq f''(x) \leq 1/4$ .

En déduire :  $\forall x \in D, 0 \leq f(x) \leq x^2/8$ .  
 Soient  $X$  une variable aléatoire telle que  $X(\Omega) \subset [a, b]$ .

montrer :  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, E(e^{\lambda X}) \leq \frac{b-E(X)}{b-a} e^{\lambda a} + \frac{E(X)-a}{b-a} e^{\lambda b}$ .

Dans le cas particulier où  $E(X) = 0$ , montrer :  $E(e^{\lambda X}) \leq e^{f(\lambda(b-a))}$ .  
 En déduire dans le cas général :  $E(e^{\lambda X}) \leq e^{\lambda E(X) + \lambda^2 (b-a)^2/8}$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , montrer :  $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq 2 \exp \left( -\frac{2\varepsilon^2}{(b-a)^2} \right)$ .

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes. On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . On suppose que, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}, X_k(\Omega) \subset [a_k, b_k]$ . Montrer pour tout  $\varepsilon > 0$  :  $P(|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon) \leq 2 \exp \left( -\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2} \right)$ .

Écoles Normales Supérieures - PC

Algèbre

187. ★ a) Soit  $X \subset \mathbb{N}$  telle que 0 et 1 appartiennent à  $X$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Card}(X \cap [0, n]) = 0$ .  
 Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $j \in \mathbb{N}$  telle que  $\text{Card}(X \cap [j, j+k]) = 2$ .  
 b) Montrer qu'il existe 100 entiers consécutifs contenant exactement 5 nombres premiers.

188. Soient deux réels  $a$  et  $b$ . On pose  $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + X$ . On suppose que les racines de  $P$  sont toutes distinctes deux à deux et qu'elles appartiennent à un même cercle du plan complexe. Montrer que  $3 < ab < 9$ .

189. Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par  $P_0 \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $\geq 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = XP'_n$ . Montrer qu'il existe une suite de réels positifs  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers 0 telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les racines complexes de  $P_n$  appartiennent au disque de centre 0 et de rayon  $\lambda_n$ .

190. Soit  $E$  l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à coefficients 0 ou 1 qui sont inversibles. Quel est le nombre maximal de 1 d'un élément de  $E$ ?

191. On dit qu'une matrice est positive si tous ses coefficients sont positifs. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer l'équivalence entre :

- (i)  $A$  est monotone, c'est-à-dire  $A$  est inversible et  $A^{-1}$  positive,
- (ii)  $\forall X \in \mathbb{R}^n, AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$ .

192. Soit  $E$  un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\dim(E) \leq n$ .

193. Déterminer les  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tels que  $X^2 = X$ .

194. Caractériser les matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $M^2 = 0$ .

195. Existe-t-il deux matrices  $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  nilpotentes et  $(NP)^2 \neq 0$ ?

196. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $X + M$  est inversible pour tout  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

197. On pose  $A_0 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ . On définit  $A_{n+1} = A_n^2$ . Montrer que la suite  $(A_n)$  converge vers une matrice  $A$ .

198. On pose  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On définit  $A_{n+1} = A_n^2$ . Montrer que  $A_n$  admet  $(n+1)$  valeurs propres.

199. On munit  $\mathbb{R}_n[X]$  de la norme  $\|X\| = \sum_{i=0}^n |x_i|$ . Montrer que  $M = \langle \langle X^i, X^j \rangle \rangle_{i,j=0}^n$  est une matrice inversible.

200. Soient  $a_0, \dots, a_n$  des réels. On pose  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ . Montrer que  $P$  a une racine réelle.

201. Soient  $n, k \in \mathbb{N}^*$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Montrer que  $\langle \lambda, X \rangle$  est une forme linéaire et telle que, pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle \lambda, X \rangle > 0$  si et seulement si  $X$  est dominant strictement positif.

202. Soient  $a_0, \dots, a_n$  des réels. On pose  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ . Montrer que  $P$  a une racine réelle.

203. Soient  $a_0, \dots, a_n$  des réels. On pose  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ . Montrer que  $P$  a une racine réelle.

204. Soient  $a_0, \dots, a_n$  des réels. On pose  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ . Montrer que  $P$  a une racine réelle.

205. Soient  $a_0, \dots, a_n$  des réels. On pose  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ . Montrer que  $P$  a une racine réelle.

206. Soient  $a_0, \dots, a_n$  des réels. On pose  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ . Montrer que  $P$  a une racine réelle.

207. Soient  $a_0, \dots, a_n$  des réels. On pose  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ . Montrer que  $P$  a une racine réelle.

208. Soient  $a_0, \dots, a_n$  des réels. On pose  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ . Montrer que  $P$  a une racine réelle.