

- b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Décrire l'ensemble des matrices inversibles P telles que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
- c) Soient A et B deux matrices codiagonalisables. On suppose que B a des valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(B)$.
- d) On suppose toujours A et B codiagonalisables mais on ne suppose plus B à valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe une matrice C et deux polynômes P et Q tels que $A = P(C)$ et $B = Q(C)$.
- e) La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ est-elle le carré d'une matrice réelle?

196. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = \text{Com}(A)^T$.
Ind. Commencera par A inversible.

197. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $d \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ f = -\text{id}$.
- a) Donner un exemple d'application f vérifiant les hypothèses en dimension 2.
- b) Montrer que f n'a pas de valeur propre réelle. Montrer que E est de dimension paire.
- c) Montrer qu'il existe (e_1, \dots, e_p) telle que $(e_1, f(e_1), \dots, e_p, f(e_p))$ soit une base de E avec $d = 2p$. Donner la matrice de f dans cette base.

198. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = A$.
- a) Montrer que $A^k B - BA^k = kA^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- b) On définit l'application $\varphi_B : M \mapsto MB - BM$.
- i) Vérifier que φ_B est un endomorphisme et caractériser son noyau.
- ii) Montrer que, si $A^p \neq 0$, alors p est une valeur propre de φ_B .
- c) La matrice A est-elle nilpotente? Justifier.

199. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}| \right\}$.

200. On note $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques : $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{S}$ si $\forall (i,j) \in [1,n]^2$, $m_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{k=1}^n m_{i,k} = 1$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\text{Sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres.

- a) Montrer que les éléments de \mathcal{S} ont tous une valeur propre commune.
- b) Montrer que \mathcal{S} est convexe, fermé, borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et qu'il est stable pour le produit.
- c) i) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{S}$, on a $\text{Sp}(A) \subset \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$.
Ind. Si $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre, considérer $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.
- ii) Soient $\lambda \in \text{Sp} A$ telle que $|\lambda| = 1$. Montrer que λ est une racine ℓ -ième de l'unité avec $\ell \leq n$.
- d) On suppose que $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}$ est telle que $a_{i,j} > 0$ pour tout $(i,j) \in [1,n]^2$.
- i) Montrer que 1 est une valeur propre de A et que $\dim \ker(A - I_n) = 1$.
- ii) Montrer que si $\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{1\}$ alors $|\lambda| < 1$.

e) On dit que E

- i) Montrer que
ii) Déterminer
iii) Déterminer
vaut 1.

201. Soient $(E, \|\cdot\|)$ une norme 1 telle qu'il existe une base vectorielle de E de dimension $2n$.
 $\mathbb{D}_{2n} = \{\sigma \in \mathcal{O}(E) \mid \sigma^2 = -\text{id}\}$

a) Trouver, pour $n=1$, une base de \mathbb{D}_2 .

b) Montrer que \mathbb{D}_{2n} est un sous-groupe d'ordre 2^{n+1} de $\mathcal{O}(E)$.

c) Montrer que \mathbb{D}_{2n} agit transitivement sur l'ensemble des bases orthonormées de E .

d) Exprimer \mathbb{D}_6 en fonction de \mathbb{D}_2 .

e) Si $\sigma \in \mathbb{D}_{2n}$ vérifie $\sigma^2 = -\text{id}$, en déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de σ est diagonale à blocs 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

f) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de σ est diagonale à blocs 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

g) Montrer que l'angle θ d'angle $\text{Arccos}(\cos \theta)$ est tel que $\theta \in [0, \pi/2]$.

h) On note $D = \mathbb{D}_{2n}$.

$D^{\mathbb{N}}$ telle que $\sigma =$

202. a) On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E qui sont orthogonales.

i) Montrer que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe d'ordre infini de $\mathcal{L}(E)$.

ii) Déterminer le centre de $\mathcal{O}(E)$.

iii) L'application $\sigma \mapsto \sigma^2$ est-elle surjective?

b) On fixe un réel $\theta \in]0, \pi/2[$. On suppose que t_0 et t_1 sont deux vecteurs unitaires de E tels que t_0 et t_1 sont orthogonaux.

i) Montrer que 4 est une valeur propre de σ .

ii) Montrer que 1 est une valeur propre de σ .

c) Soient $Q \in \mathcal{O}(E)$ et $\theta \in]0, \pi/2[$.

i) Montrer que Q agit transitivement sur l'ensemble des bases orthonormées de E .

ii) Déterminer le centre de $\mathcal{O}(E)$.

d) Soit $M \in \mathcal{O}_2$. Montrer que M est orthogonale si et seulement si elle est symétrique.

203. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique si et seulement si A est orthogonale.