

- e) On dit que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie (P) si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $b_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{k=1}^n b_{i,k} \leq 1$.
- i) Montrer que si $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie (P) alors $|\det B| \leq 1$.
- ii) Déterminer l'ensemble des matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient (P) ainsi que $|\det B| = 1$.
- iii) Déterminer l'ensemble des matrices stochastiques dont la valeur absolue du déterminant vaut 1.

201. Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un plan euclidien, $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de E de norme 1 telle que $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = \dots = \langle v_n, v_1 \rangle$. Soit \mathbb{D}_{2n} l'ensemble des isométries vectorielles de E qui laissent invariantes la famille \mathcal{V} , c'est-à-dire :

- a) Trouver, pour $1 \leq i < j \leq n$, la valeur de l'angle $\langle v_i, v_j \rangle$.
- b) Montrer que \mathbb{D}_{2n} est un sous-ensemble fini de $\mathcal{O}(E)$.
- c) Montrer que \mathbb{D}_{2n} est stable par composition et passage à l'inverse.

- d) Exprimer \mathbb{D}_6 et \mathbb{D}_8 .
- e) Si $\sigma \in \mathbb{D}_{2n}$ vérifie $\sigma(v_1) = v_i$, montrer que $\sigma(v_2) = v_{i-1}$ ou $\sigma(v_2) = v_{i+1}$.
- f) En déduire que le cardinal de \mathbb{D}_{2n} est $2n$.

- g) Montrer que $\mathbb{D}_{2n} = \{\text{id}, r, sr, r^2, sr^2, r^3, sr^3, \dots\}$ où s est une réflexion et r une rotation d'angle $\arccos(\langle v_1, v_2 \rangle)$.
- h) On note $D = \bigcup_{n \geq 3} D_{2n}$. Montrer que pour tout $\sigma \in \mathcal{O}(E)$, il existe une suite $(\sigma_k)_{k \geq 0} \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $\sigma = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma_k$.

202. a) On note ϕ l'application $M \mapsto M^T$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- i) Montrer que ϕ est un automorphisme.
- ii) Déterminer les valeurs propres de ϕ .

- iii) L'application ϕ est-elle diagonalisable ? Justifier.
- b) On fixe un réel $\mu > 0$. Soit f l'application $t \mapsto (4\mu t^2, 2\mu t)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 . On suppose que t_0 et t_1 sont deux réels tels que les tangentes au support de la courbe paramétrée définies par f sont orthogonales.

- i) Montrer que $4\mu t_1 + 1 = 0$.
- ii) Montrer que le point d'intersection des tangentes en $f(t_0)$ et $f(t_1)$ appartient à une droite fixe.

c) Soient $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- i) Montrer que $(QX)^T(QY) = X^TY$.
- ii) Déterminer les valeurs propres réelles de Q puis montrer que deux vecteurs propres associés à des valeurs propres réelles distinctes sont orthogonaux.

- d) Soit $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable sur \mathbb{R} . Montrer, qu'à similitude près, M peut prendre exactement trois formes distinctes. Pour chacune d'entre elles donner la transformation géométrique du plan correspondante.

203. a) Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ de rang k . Montrer qu'il existe des vecteurs U_1, \dots, U_k linéaire-

ment indépendants dans \mathbb{R}^n tels que $A = \sum_{j=1}^k U_j U_j^T$.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Leur produit d'Hadamard $A \circ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de terme général $a_{ij}b_{ij}$.

- b) Montrer que, si A et B sont des matrices symétriques de rang 1, alors $A \circ B$ est symétrique de rang au plus 1.
- c) Montrer que, si A et B sont symétriques positives, alors $A \circ B$ est symétrique.
- d) Si A et B sont symétriques positives, montrer que $A \circ B$ est symétrique positive.

204. On note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(c_0, \dots, c_{2n-1}) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $c_n = 1$ et $c_{n+1} = \dots = c_{2n-1} = 0$. On pose $Q = \sum_{k=0}^n c_k X^k$. On considère enfin les

matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivantes : $A = (a_{i,j})$, où $a_{i,j} = 1$ si $j = i - 1$, $a_{i,j} = -c_{i-1}$ si $j = n$ et $a_{i,j} = 0$ sinon ; $B = (b_{i,j})$ et $C = (c_{i,j})$.

- a) Montrer que $Q(A) = 0$. Ind. Calculer $A^k e_1$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.
- b) On pose $\mathbb{R}[A] = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; \exists P \in \mathbb{R}[X], M = P(A)\}$. Montrer : $\dim \mathbb{R}[A] = n$.
- c) Montrer que CB est triangulaire. En déduire que B est inversible.
- d) Montrer que $AB = BA^T$.
- e) Montrer que A est semblable à sa transposée.
- f) Montrer que A s'écrit comme le produit de deux matrices symétriques.

205. a) i) Soit m un entier ≥ 2 . Montrer que $\int_1^{m-1} \frac{dx}{\sqrt{x(m-x)}} \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{k(m-k)}}$.

ii) Calculer $\int_1^{m-1} \frac{dx}{\sqrt{x(m-x)}}$ l'aide du changement de variables $x = \frac{m}{1+t^2}$.

b) Soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de terme général $\frac{1}{i+j-1}$.

i) Montrer que $A_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

ii) Soit λ_n la plus petite des valeurs propres de A_n . Montrer qu'il existe $a, b > 0$ tels que $\forall n \geq 1, 0 \leq \lambda_n \leq \frac{1}{n}(a + b \ln(n))$.

c) Soient μ_n la plus grande valeur propre de A_n et $X = (1/\sqrt{1}, 1/\sqrt{2}, \dots, 1/\sqrt{n})^T \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\langle A_n X, X \rangle \geq 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \arctan(\sqrt{i-1})$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .

d) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_{-1}^1 P(t) dt = -i \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$. En déduire que,

pour tout $Q = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 Q^2(t) dt \leq \int_{-1}^1 Q^2(t) dt \leq \pi \sum_{k=0}^d a_k^2$.

e) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = \pi$.

206. On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique. On considère des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que : $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $M_i = (\lambda_i, \lambda_i^{-1})$.

On considère $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|y\|_2 = 1$ et on note M le barycentre des M_i pondéré par les coefficients y_i^2 .

a) Montrer que $M = (a, b)$ où $a = \langle Dy, y \rangle$ et $b = \langle D^{-1}y, y \rangle$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

b) Montrer que $a^{-1} \leq b \leq \frac{\lambda_1 \lambda_n}{\lambda_1^{-1} + \lambda_n^{-1}}$.

c) En déduire que $1 \leq ab \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \right)^2$.

d) On considère $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\|x\|_4^2 \leq \langle Ay, y \rangle \langle A^{-1}y, y \rangle \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \right)^2 \|x\|_2^4$.

e) Soient $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle + c$. Montrer que f admet un minimum atteint en un unique point, et déterminer sa valeur.

Analyse

207. On pose $A_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt$, $B_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t) dt$ et $X_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que A_n et B_n existent et que $|A_n|^2 + |B_n|^2 \leq (2n)!$.

b) Trouver A_0 et B_0 .

c) Montrer qu'il existe une matrice de rotation $R(\theta_0)$ telle que $(n+1)X_n = \sqrt{2}R(\theta_0)X_{n+1}$.

d) Exprimer A_n et B_n en fonction de n .

e) Trouver une condition pour que $A_n = B_n$.

f) Montrer qu'il existe $g_1, g_2 \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ distinctes telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^n g_1(t) dt = \int_0^{+\infty} t^n g_2(t) dt$.

208. Soient $E = C^0([0, 1], \mathbb{C})$ et $F = \mathcal{D}'([0, 1], \mathbb{C})$. On définit T comme l'opérateur qui, à tout $f \in E$ associe : $Tf : x \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$. On note E_λ le sous-espace propre de T pour une valeur propre λ .

a) i) Montrer que T est un endomorphisme.

ii) Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $T^n(f)$ à l'aide d'une somme.

iii) Montrer que $(T^n(f))_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction ℓ .

b) i) Montrer que $E_\lambda = \{0\}$ si $|\lambda| \geq 1$ et $\lambda \neq 1$.

ii) Soit λ tel que $|\lambda| < 1$.

i) Montrer que $f_\lambda : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \cos(2^k \pi x)$ est définie et continue sur $[0, 1]$.

ii) Montrer que $f_\lambda \in E_\lambda$.

d) On note $D_\lambda = E_\lambda \cap F$.

i) Montrer que, si $|\lambda| < \frac{1}{2}$, $D_\lambda \neq \{0\}$.

- ii) Comparer $T(f')$ et $(Tf)'$ pour $f \in F$.
 iii) Montrer que, si $|\lambda| \geq \frac{1}{2}$ et $\lambda \neq \frac{1}{2}$, $D_\lambda = \{0\}$.

209. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u_0(x) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}.$$

- a) Étudier la convergence de $\sum u_n$.
 b) Sur quel domaine a-t-on $(\sum u_n)' = \sum u_n'$?
 c) La fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est-elle dérivable en 0?

210. On fixe $p > 1$. On note q l'unique réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et non identiquement nulle telle que $\int_0^{+\infty} f(t)^p e^t dt$ converge.

- a) Soient $t \in]0, 1[$ et $(u, v) \in (\mathbb{R}^+)^2$. Montrer que $u^t v^{1-t} \leq tu + (1-t)v$.

Ind. Utiliser un argument de convexité ou une étude de fonction.

- b) i) Soit $A > 0$, et soient g et h deux fonctions continues de $[0, A]$ dans \mathbb{R} .

$$\text{Montrer que } \int_0^A |g(t)h(t)| dt \leq \frac{1}{p} \int_0^A |g(t)|^p dt + \frac{1}{q} \int_0^A |h(t)|^q dt.$$

$$\text{ii) En déduire que } \int_0^A |g(t)h(t)| dt \leq \left(\int_0^A |g(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^A |h(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

- c) i) Pour $n \geq 0$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} t^n f(t) dt$ et, pour $a \geq 0$, $I(a) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-t} dt$.

Montrer que la suite (u_n) est bien définie et qu'il existe $K \in \mathbb{R}^{+*}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq K \left(\frac{p}{q} \right)^n (I(nq))^{1/q}.$$

- ii) En déduire que $\sum |u_n|^{-1/n}$ diverge.

- d) On suppose que $p = 1$. Montrer que $\sum |u_n|^{-1/n}$ diverge.

211. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $g_\alpha: t \in]0, +\infty[\mapsto e^{-t} t^\alpha$.

- a) Donner les valeurs de α tels que $\int_0^{+\infty} g_\alpha(t) dt$ converge.

- b) Calculer $I(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt$, avec $p \in]0, +\infty[$.

- c) Justifier l'existence de $\frac{d^k I}{dp^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- d) En déduire $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- e) Retrouver ce résultat en intégrant par parties $\int_\varepsilon^x g_n(t) dt$ pour $0 < \varepsilon < x$.

212. Soit α

a) Montre

b) Montre

c) En dédu

d) Montre

213. Soient

l'équation

a) Soient

pose $\Phi =$

$$\int_a^x \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} dt$$

b) Montre

$$r(x) = \sqrt{\dots}$$

c) On pos

sur \mathbb{R}^+ .

d) Soit y

$$Y'' + vY'$$

e) Montre

$r \sin(\theta)$ où

f) Montre

214. On co

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) +$$

a) i) Mont

de la droite

et que celle

ii) On sup

$$u(x, t) = v$$

iii) En dédu

une solutio

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

b) i) On su

212. Soit $a > 0$. On pose $I(a) = \int_{+\infty}^0 e^{-t^2 - a^2/t^2} dt$ et $J(a) = a \int_{+\infty}^0 \frac{t^2}{e^{-t^2 - a^2/t^2}} dt$.

a) Montrer que ces intégrales convergent.

b) Montrer que $I(a) = J(a)$.

c) En déduire que $I(a) = \frac{e^{-2a}}{2} \int_{+\infty}^0 \left(1 + \frac{t^2}{a}\right) e^{-(t-a/t)^2} dt$

d) Montrer que $I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$. La valeur de l'intégrale de Gauss était donnée.

213. Soient $a > 0$ et $q \in C^2([a, +\infty[; \mathbb{R}^+)$ telle que $\int_{+\infty}^a \sqrt{q(t)} dt = +\infty$. Soit (E)

l'équation différentielle $y'' + qy = 0$.

a) Soient y_1 et y_2 deux fonctions de classe C^1 qui n'ont pas de zéros en commun. On pose $\Phi = y_1 + iy_2$ et $\Phi(a) = r_0 e^{i\theta_0}$. Montrer que $\forall x \geq a$, $\Phi(x) = e^{\Psi(x)}$ où $\Psi(x) = \int_a^x \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} dt + \ln(r_0) + i\theta_0$.

b) Montrer que l'on peut écrire $y_1(x) = r(x) \cos(\theta(x))$ et $y_2(x) = r(x) \sin(\theta(x))$ où $r(x) = \sqrt{y_1^2(x) + y_2^2(x)}$ et $\theta(x) = \theta_0 + \int_a^x \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2 + y_2^2} dt$.

c) On pose $x \mapsto f(x) = \int_x^a \sqrt{q(t)} dt$. Montrer que f réalise une bijection de $[a, +\infty[$ sur \mathbb{R}^+ .

d) Soit y une solution de (E) , non identiquement nulle. On pose $Y = y \circ f^{-1}$. Montrer que $Y'' + vY' + Y = 0$ où $v : t \mapsto \frac{q(f^{-1}(t))}{f'(f^{-1}(t))}$.

e) Montrer que Y et Y' n'ont pas de zéro en commun et que l'on peut écrire $Y = r \cos(\theta)$ et $Y' = r \sin(\theta)$ où r, θ sont des fonctions de classe C^1 .
f) Montrer que $(r^2)' = -2vr^2 \sin^2(\theta)$. En déduire que y et y' sont bornées.

214. On considère une solution u de l'équation de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = f(x, t) \text{ où } u(x, 0) = u_0(x).$$

a) i) Montrer alors que si u est solution de l'équation homogène, alors u est constante le long de la droite $x = x_0 + ct$. En déduire qu'il existe une unique solution de l'équation homogène, et que celle-ci est : $u(x, t) = u_0(x - ct)$.

ii) On suppose f non nulle. Montrer que pour une solution u , on a :

$$u(x, t) = u_0(x_0) + \int_{x_0}^x f(x_0 + c\theta, \theta) d\theta.$$

iii) En déduire que : $u(x, t) = u_0(x - ct) + \int_t^0 f(x - c(t - \theta), \theta) d\theta$. On considère maintenant

une solution u de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \text{ où } u(x, 0) = g(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x).$$

b) i) On suppose u de classe C^2 . Montrer que :

- $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$
- ii) En déduire qu'une solution u de l'équation s'écrit : $u(x, t) = u_1(x + ct) + u_2(x - ct).$
- iii) On pose $v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x, t).$ Montrer que v est solution d'une équation de transport dont on précisera le paramètre c ainsi que les conditions initiales.
- iv) Exprimer u en fonction de v et déduire :
- $$u(x, t) = \frac{1}{2}(g(x - ct) + g(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(\tau) d\tau.$$
- c) i) Trouver toutes les solutions C^2 de l'équation d'onde à variables séparées, de la forme : $u(x, t) = \phi(t)\psi(x)$
- ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $g : x \mapsto \sum_{k=1}^n a_k \sin(k\pi x)$ et $h = 0$. Déterminer $u(x, t).$

215. On munit \mathbb{R}^d de sa structure euclidienne canonique. On dit que f est différentiable sur l'ouvert Ω si ∇f existe et est continu.

- a) Soient C ouvert convexe non vide de \mathbb{R}^d , $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On suppose que ∇f est L -lipschitzien. Soient $w, v \in C$ et $g : t \mapsto f(v + t(w - v)).$
- i) Exprimer $g'(t).$

ii) Montrer que $f(w) - f(v) = \int_0^1 \langle \nabla f(v + t(w - v)), w - v \rangle dt.$

iii) Montrer que $f(w) \leq f(v) + \langle \nabla f(v), w - v \rangle + \frac{L}{2} \|w - v\|^2.$

b) Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Montrer que f est convexe si et seulement si $\forall w, v \in \mathbb{R}^d, f(w) \geq f(v) + \langle \nabla f(v), w - v \rangle.$ Ind. Commencer par $d = 1.$

c) Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On pose $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = v_n - \frac{1}{2L} \|\nabla f(v_n)\|^2$ pour

$n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f(v_{n+1}) \leq f(v_n) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(v_n)\|^2$ pour $n \in \mathbb{N}.$

d) On suppose de plus f convexe.

i) Montrer que $\forall w \in \mathbb{R}^d, f(v_{n+1}) \leq f(w) + \langle \nabla f(v_n), v_n - w \rangle - \frac{1}{2L} \|\nabla f(v_n)\|^2.$

ii) Montrer que $f(v_n) - f(w) \leq \frac{L}{2} (\|v_n - w\|^2 - \|v_{n+1} - w\|^2).$

iii) Montrer que $f(v_n) - f(w) \leq \frac{L}{2n} \|w\|^2.$

d) Soit v_* un point critique de f . Montrer que v_* est un minimum local de f et que la suite (v_n) converge vers v_* .

Probabilités

216. Soit $n \geq 2$. On note $n = p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r}$ sa décomposition en facteurs premiers. On munit $\Omega = \{1, \dots, n\}$ de la loi uniforme. Pour tout diviseur d de n , on note A_d l'ensemble des multiples de d contenus dans $\Omega : A_d = \left\{ kd, k \leq \frac{n}{d} \right\}.$

a) i) Montrer que si d et d' sont deux entiers premiers entre eux alors $A_d \cap A_{d'} = A_{dd'},$ et en déduire que A_d et $A_{d'}$ sont indépendants.

ii) On note $B = \{$ expression de $P(B$

iii) Soient n et m d

b) On note $\mathcal{U} = \{$

dans \mathcal{U} , on note n_z

i) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel q

que $\lim_{k \rightarrow +\infty} z_k = z.$

ii) Pour tout entier

de cardinal $\varphi(m), e$

iii) Montrer que \mathcal{U}

217. Soit X une var

sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})).$ On

$n) > 0$ et $P_2(X =$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$

Enfin, on pose $\ell(X)$

a) Soit $C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ a

b) On suppose que

pour $P_2.$

i) Calculer $u_n(X)$ e

ii) Montrer que \sum

iii) Montrer que $\ell(X)$

iv) Montrer que $\{n$

c) On revient au cas

d) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}$

218. Soient $X_1, \dots,$

centrées, de varianc

note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$

a) Soient Y_1, \dots, Y_r

avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in$

sur a et b les X_i véri

b) Montrer $\forall u \in]-$

c) Dans le cas géné

- iii) On note $B = \{k \in \Omega, k \wedge n = 1\}$. Exprimer B en fonction des A_{p_i} et en déduire une expression de $P(B)$ puis de $|B|$. Cette valeur sera notée $\varphi(n)$.
- iiii) Soient n et m deux entiers premiers entre eux. Montrer que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.
- b) On note $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ où \mathcal{U}_n désigne l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité. Pour z dans \mathcal{U} , on note $n_z = \inf\{n \in \mathbb{N}, z \in \mathcal{U}_n\}$.
- i) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, montrer qu'il existe une suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathcal{U} telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} z_k = z$.
- ii) Pour tout entier naturel n on note $P_m = \{z \in \mathcal{U}, n_z = m\}$. Montrer que P_m est fini et de cardinal $\varphi(m)$, et que si n et m sont distincts $P_m \cap P_n = \emptyset$.
- iii) Montrer que $\mathcal{U} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} P_m$.

217. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Soient P_1 et P_2 deux probabilités sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_1(\{n\}) > 0$, $P_2(\{n\}) > 0$, $P_1(X = n) > 0$ et $P_2(X = n) > 0$. Soit $A = \{n \in \mathbb{N}, P_1(\{n\}) \leq P_2(\{n\})\}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n(X) = P_2(X = n) \ln \left(\frac{P_2(X = n)}{P_1(X = n)} \right)$.

Enfin, on pose $\ell(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(X)$ si cette série converge, $\ell(X) = +\infty$ sinon.

- a) Soit $C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ avec $C \neq \emptyset$. Montrer que $0 < P_1(C) < 1$ pour $i = 1, 2$.
- b) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ_1 pour P_1 et de paramètre λ_2 pour P_2 .
- i) Calculer $u_n(X)$ en fonction de n, λ_1, λ_2 .
- ii) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(X)$ converge et exprimer sa somme $\ell(X)$ en fonction de λ_1, λ_2 .
- iii) Montrer que $\ell(X) \geq 0$.
- iv) Montrer que $\{n \in \mathbb{N}, n \geq \max(\lambda_1, \lambda_2)\} \subset A \subset \{n \in \mathbb{N}, n \leq \min(\lambda_1, \lambda_2)\}$.
- c) On revient au cas général. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(X)$ converge et que $\ell(X) \geq 0$.
- d) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} |P_2(X = n) - P_1(X = n)| = 2(P_2(X \in A) - P_1(X \in A))$.

218. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires à valeurs réelles, identiquement distribuées, centrées, de variance finie σ^2 et indépendantes. On suppose de plus $P(|X_1| > 1) = 0$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

a) Soient Y_1, \dots, Y_n des variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $B(m, p)$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Pour $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on note $X_i = aY_i + b$. À quelle condition sur a et b les X_i vérifient-elles les conditions précédentes ?

b) Montrer $\forall u \in]-\infty, 2], e^u \leq 1 + u + \frac{u^2}{2}(1 + \max(0, u))$.

c) Dans le cas général, montrer $\forall t \in [0, 2], E(e^{tX_1}) \leq 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2}(1 + t) \leq e^{\sigma^2 t^2(1+t)/2}$.