

- b) On suppose  $\alpha < 1$ . On pose  $\beta > 0$  et  $N = \max\{n \in \mathbb{N}^*, S \cap [n, n + n^\beta] = \emptyset\}$ . Donner des conditions sur  $\beta$  pour que  $P(N = +\infty) = 1$  et pour que  $P(N = +\infty) = 0$ .
- c) Montrer que, presque sûrement, il existe un rationnel  $\gamma$  tel que  $\lfloor \gamma^{2^n} \rfloor \notin S$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**391. ★★** Soient  $N \geq 1$ ,  $\mu$  une distribution de probabilité sur  $[1, N]$  telle que  $\mu(1) > 0$ ,  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi  $\mu$ . On pose  $S_0 = 0$  et, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Soit  $E = \{S_m, m \in \mathbb{N}\}$ .

- a) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $P(n \in E) = \sum_{k=1}^N \mu(k) P(n - k \in E)$ .

On pose  $F : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(n \in E) z^n$  et  $G : z \mapsto \sum_{k=1}^N \mu(k) z^k$ .

- b) On pose  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ . Montrer que :  $\forall z \in \mathbb{D}, F(z) = \frac{1}{1 - G(z)}$ .
- c) Montrer que 1 est un pôle simple de  $F$  et tous les autres pôles de  $F$  ont un module strictement supérieur à 1.
- d) Montrer que  $P(n \in E) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{E(X_1)}$ .

### École Polytechnique - PSI

#### Algèbre

**392.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $P_0 = 1$  et, pour  $1 \leq k \leq n$ ,  $P_k = \prod_{j=0}^{k-1} (X - j)$ . Montrer qu'il

existe  $(s_0, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$  tel que  $X^n = \sum_{k=0}^n s_k P_k$ .

**393.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie.

- a) Quels sont les endomorphismes de  $E$  qui commutent avec tous les projecteurs ?
- b) Quels sont les éléments de  $GL(E)$  qui commutent avec tous les éléments de  $GL(E)$  ?

**394.** Soient  $A_1, \dots, A_m$  des matrices distinctes de  $M_n(\mathbb{R})$ , commutant entre elles et telles que :  $\forall i \in [1, m], A_i^2 = I_n$ . Montrer que  $m \leq 2^n$ .

**395.** Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $A$  et  $B$  ont une valeur propre commune si et seulement s'il existe  $C \in M_n(\mathbb{C})$  non nulle telle que  $AC = CB$ .

#### Analyse

**396.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$ ,

$$|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq c \prod_{i=1}^n \|v_i\|_\infty.$$

**397.** Déterminer les

**398.** On note  $S(\mathbb{R})$

a) Montrer que  $\forall k$

b) Soit  $\varphi \in S(\mathbb{R})$  possède une primit

**399.** On munit  $\mathbb{R}^n$  toriels de même di  $u \neq 0$ . Montrer qu

**400.** Soit  $f \in C^0([$

Déterminer la limi

Ind. Utiliser  $J_n =$

**401.** Soient  $f \in$

qu'elle tend vers  $C$  de  $[-a, a]$ .

**402.** Soit  $(E) : y'$

**403.** On considér

a) Montrer qu'il

$y_2(0) = 0, y_2'(0)$  Montrer que tout

b) Pour  $y \in Sol$  Déterminer la na

c) Montrer que, alors  $\lambda$  est racine

Étudier la récipro

d) Montrer que

**404.** Soient  $E_{n,d}$   $V_{n,d} = \{f : (x_1$

a) Montrer que

b) Soit  $\Delta : f \in$

#### Géométrie

397. Déterminer les  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = \int_{x+y}^{x-y} f(t) dt$ .

398. On note  $S(\mathbb{R}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, x \mapsto x^k \varphi^{(j)}(x) \text{ est bornée}\}$ .  
 a) Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, x \mapsto x^k \varphi^{(j)}(x)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .  
 b) Soit  $\varphi \in S(\mathbb{R})$ . Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $\varphi$  pour que  $\varphi$  possède une primitive appartenant à  $S$ .

399. On munit  $\mathbb{R}^n$  de son produit scalaire canonique. Soient  $U$  et  $W$  deux sous-espaces vectoriels de même dimension  $m$ . On suppose qu'il existe un vecteur  $u \in U$  tel que  $u \in W^\perp$ ,  $u \neq 0$ . Montrer qu'il existe  $v \neq 0 \in W$  tel que  $v \in U^\perp$ .

400. Soit  $f \in C^0([0, \pi/2], \mathbb{R})$ . On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*, I_n = (n+1) \int_0^{\pi/2} x f(x) \cos(x)^n dx$ .  
 Déterminer la limite de  $(I_n)_{n \geq 0}$ .  
 Ind. Utiliser  $J_n = (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos(x)^n dx$ .

401. Soient  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{+\infty}^{-\infty} f(t) e^{it^2 x} dt$ . Montrer que  $F$  est définie et qu'elle tend vers 0 en  $+\infty$ . Ind. Traiter le cas où  $f$  est  $C^1$ , le cas où  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}$  privé de  $[-a, a]$ .

402. Soit  $(E) : y'' + \frac{1+t^2}{t} y = 0$ . Montrer que  $(E)$  admet une solution non bornée.

403. On considère l'équation différentielle  $(E) : y''(t) + \varphi(t)y(t) = 0$ , avec  $\varphi$  continue  $2\pi$ -périodique et on note  $Sol$  l'ensemble des solutions de  $(E)$  de classe  $C^2$  à valeurs complexes.  
 a) Montrer qu'il existe  $y_1 \in Sol$  telle que  $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ , et  $y_2 \in Sol$  telle que  $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$ .  
 b) Pour  $y \in Sol$ , on note  $\Psi(y)$  la fonction  $t \mapsto y(t + 2\pi)$ . Montrer que  $\Psi(y) \in Sol$ .  
 Montrer que toute solution de  $(E)$  est combinaison linéaire de  $y_1$  et  $y_2$ .

c) Montrer que, si  $z \in Sol$  avec  $z \neq 0$  est telle que  $\forall t \in \mathbb{R}, z(t + 2\pi) = \lambda z(t)$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ , alors  $\lambda$  est racine du polynôme  $X^2 - (y_1(2\pi) + y_2'(2\pi))X - y_1'(2\pi)y_2(2\pi) + y_1(2\pi)y_2'(2\pi)$ .  
 d) Montrer que  $\lambda$  ne peut être nul puis que  $\det(\phi) = 1$ .  
 Étudier la réciproque.

404. Soient  $E_{n,d} = \{(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d, i_1 + \dots + i_d = n\}$  et  $V_{n,d} = \{f : (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mapsto x_{i_1}^{i_1} \dots x_{i_d}^{i_d} \in E_{n,d}\}$ .  
 a) Montrer que  $V_{n,d}$  forme une famille libre et déterminer son cardinal.  
 b) Soit  $\Delta : f \in \text{Vect}(V_{n,d}) \mapsto \Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}$ . Déterminer  $\text{Ker } \Delta$ .

## Géométrie

405. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_{2n}$  des points distincts de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer qu'il existe toujours une droite séparant ces  $2n$  points en deux groupes de  $n$  points.

### Probabilités

406. Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{G}(1/2)$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_k$  l'événement «  $X$  est multiple de  $k$  ».

a) Soient  $(p, q) \in (2\mathbb{N}^*)^2$ . Les événements  $A_p$  et  $A_q$  sont-ils indépendants ?

b) Même question pour  $p$  et  $q$  quelconques dans  $\mathbb{N}^*$ .

407. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires. On suppose que  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$  et que, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $(X = N)$  est la loi binomiale  $\mathcal{B}(N, p)$ . Déterminer  $E(Y)$ .

408. Soit  $M = \begin{pmatrix} X_1 & 1 & 0 \\ 0 & X_2 & 1 \\ 0 & 0 & X_3 \end{pmatrix}$  où  $X_1, X_2, X_3$  sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre  $p$ . Calculer la probabilité que  $M$  soit diagonalisable.

409. Soient  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une famille de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$  et  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ . Déterminer  $E(\det(A))$  et  $V(\det(A))$ .

410. Soit  $Y$  une variable aléatoire à support fini inclus dans  $\mathbb{R}^+$ . Déterminer à quelle condition on a  $E(Y^{1/2^n}) = E(Y)^{1/2^n}$  pour tout entier naturel  $n$ .

### École Polytechnique - ESPCI - PC

### Algèbre

411. Un graphe est un couple  $G = (S, A)$  où  $S$  est un ensemble fini et  $A$  un ensemble de paires de  $S$ . Les éléments de  $S$  s'appellent les sommets de  $G$  et ceux de  $A$  les arêtes de  $G$ . Soient  $G = (S, A)$  et  $G' = (S', A')$  deux graphes et  $f$  une application de  $S$  dans  $S'$ . On dit que  $f$  est un morphisme de  $G$  dans  $G'$  si  $\forall (u, v) \in S^2, \{u, v\} \in A \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in A'$ . On dit que  $f$  est un isomorphisme de  $G$  dans  $G'$  si  $\forall (u, v) \in S^2, \{u, v\} \in A \iff \{f(u), f(v)\} \in A'$ . Donner une majoration du nombre de graphes à  $n$  sommets et  $k$  arêtes deux à deux non isomorphes.

412. ★ Soient  $n \geq 2$  et  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe un entier  $i \in [0, n]$  tel que l'on ait

$$\left| \sum_{k=0}^i a_k - \sum_{k=i+1}^n a_k \right| \leq \sup_{0 \leq k \leq n} |a_k|.$$

413. ★★ Soit  $P = X^2 + c_1 X + c_0$  à coefficients dans  $\mathbb{N}$ . Déterminer les suites d'entiers naturels  $(a_n)$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(a_n) = a_{n+1} a_{n+2}$ .