Comparaison de normes sur un espace de polynômes

Partie A — les polynômes de Tchebychev

On définit une suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes réels en posant

$$\mathrm{T}_0 = 1, \quad \mathrm{T}_1 = \mathrm{X}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n.$$

1. Calculer les polynômes $\mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3, \mathrm{T}_4$.

2. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout t réel, prouver l'égalité $\mathrm{T}_n(\cos(t)) = \cos(nt)$.
Pour tout n dans $\mathbb{N}$, justifier que T_n est le seul polynôme vérifiant cette identité.

3. Trouver le degré et le coefficient dominant de T_n.

4. Étudier la parité de T_n.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $\mathrm{T}_n(\cos(t)) = 0$. En déduire la factorisation de T_n.

6. Factoriser également le polynôme T'_n.

Partie B — comparaison de deux normes

Étant donné un polynôme réel P écrit sous la forme $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k$, on pose

$$\mathrm{L}(\mathrm{P}) = \sup_{t\in[-1,1]} |\mathrm{P}(t)| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}(\mathrm{P}) = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

Enfin, pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose $\varphi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{P}(\cos(t))\mathrm{Q}(\cos(t))\, \mathrm{d}t$.

1. Justifier que N est une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On admet que L en est une aussi.

2. Justifier que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, prouver l'inégalité $\mathrm{L}(\mathrm{P}) \leqslant (n+1)\mathrm{N}(\mathrm{P})$.
Trouver un polynôme P non nul réalisant le cas d'égalité de cette majoration.

4. Peut-on trouver une telle majoration valable sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tout entier ?

5. Calculer $\mathrm{L}(\mathrm{T}_n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

6. Pour tout couple (n, m) d'éléments de $\mathbb{N}$, calculer $\varphi(\mathrm{T}_n, \mathrm{T}_m)$.

7. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Montrer qu'il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant l'égalité

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, \mathrm{T}_k.$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, prouver alors la majoration $|\alpha_k| \leqslant 2\mathrm{L}(\mathrm{P})$.

8. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver la majoration $\mathrm{N}(\mathrm{T}_{n+1}) \leqslant 2\mathrm{N}(\mathrm{T}_n) + \mathrm{N}(\mathrm{T}_{n-1})$.

Dans la suite, on pose $q = (1 + \sqrt{2})$.

9. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver la majoration $\mathrm{N}(\mathrm{T}_n) \leqslant q^n$.

10. Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, obtenir finalement la majoration $\mathrm{N}(\mathrm{P}) \leqslant q^{n+1}\sqrt{2}\,\mathrm{L}(\mathrm{P})$.