Autour de la fonction Gamma

Pour tout x dans $]0,+\infty[$, on pose $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $]0,+\infty[$, on pose $\mathrm{B}_n(x)=\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n\ \mathrm{d}y$.

1. Montrer rapidement que les nombres $\Gamma(x)$ et $\mathrm{B}_n(x)$ sont bien définis.

2. Pour tout x dans $]0,+\infty[$, établir un lien entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.

3. Pour tout x dans $]0,+\infty[$ et tout n dans $\mathbb{N}^*$, établir un lien entre $\mathrm{B}_n(x)$ et $\mathrm{B}_{n-1}(x+1)$.

En itérant cette relation, obtenir une expression explicite de $\mathrm{B}_n(x)$.

4. Pour tout x dans $]0,+\infty[$ et tout n dans $\mathbb{N}$, vérifier la relation $\mathrm{B}_n(x)=\dfrac{\Gamma(x)\times\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}$.

5. Soit x dans $]0,+\infty[$. En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer la relation suivante

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ \mathrm{d}t.$$

En déduire la relation suivante

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x\times n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

6. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\gamma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln(n)$.

Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant1}$ est convergente. Sa limite sera notée γ.

7. Pour tout x dans $]0,+\infty[$ et tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $v_n(x)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right]$.

Montrer que la suite de fonctions $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $v : x\mapsto\dfrac{\exp(-\gamma x)}{x\Gamma(x)}$.

8. En déduire la relation suivante

$$\forall x\in\,]0,+\infty[,\qquad \ln(\Gamma(x))=-\gamma x-\ln(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right].$$

9. Prouver que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et prouver l'identité

$$\forall x\in\,]0,+\infty[,\qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\gamma-\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right).$$

En particulier, que vaut $\Gamma'(1)$?

10. On admet la formule suivante, issue de la théorie des séries de Fourier, que nous n'avons plus au programme

$$\forall x\in\,]0,1[,\qquad \pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}.$$

Pour tout x dans $]0,1[$, prouver l'identité $\Gamma(x)\times\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$ (connue sous le nom de *formule des compléments*).

Exercice 1. Le but de cet exercice est d'étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x+\cdots+x^{n-1}}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(v)}{1-v}\,\mathrm{d}v$ est convergente. Sa valeur est notée α.

2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-v^{1/n}}{1-v}\,\mathrm{d}v$ est convergente. Sa valeur est notée I_n.

3. Pour tout t dans $]-\infty,0]$, montrer l'encadrement $-t\,\mathrm{e}^t \leqslant 1-\mathrm{e}^t \leqslant -t$.

4. En déduire un encadrement de I_n puis prouver que I_n est équivalent à $-\alpha/n$ quand n tend vers $+\infty$.

5. Trouver un lien entre u_n et I_n puis conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2. On note $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées.

Pour tout élément $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\ell^\infty(\mathbb{R})$, on pose

$$||u|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}.$$

Pour tout i dans $\mathbb{N}$, on considère la suite $\delta_i = (\delta_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$\delta_{i,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=i \\ 0 & \text{si } n\neq i. \end{cases}$$

On note E_0 l'ensemble des suites réelles de limite nulle. On rappelle que c'est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

Question 1. Montrer que $||\ ||$ est une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

Question 2. Montrer que N est une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

Question 3. Pour toute suite u appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{R})$, prouver l'inégalité $\mathrm{N}(u) \leqslant 2||u||$.

Question 4. Montrer que la suite de suites $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers la suite nulle pour la norme N.

Question 5. Montrer que la suite de suites $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est divergente relativement à la norme $||\ ||$. Pour cela, on raisonnera par l'absurde en supposant qu'elle converge et en prouvant que sa limite est forcément la suite nulle.

Question 6. Les normes $||\ ||$ et N sont-elles équivalentes ?

Question 7. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{S}_k = \delta_0 + \cdots + \delta_k$.
Montrer que la suite de suites $(\mathrm{S}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme N vers la suite constante égale à 1.

Question 8. L'ensemble E_0 est-il un fermé de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ pour la norme N ?

Question 9. Montrer que E_0 est un fermé de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ pour la norme $||\ ||$.

Exercice 3. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est *additive*, ce qui signifie

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x)+f(y).$$

a. Pour tout x dans $\mathbb{R}$ et tout n dans $\mathbb{Z}$, prouver l'égalité $f(nx) = nf(x)$.

b. Pour tout x dans $\mathbb{R}$ et tout q dans $\mathbb{Q}$, prouver l'égalité $f(qx) = qf(x)$.

c. On suppose que f est continue en 0. Prouver que f est de la forme $x\mapsto ax$ pour un certain $a\in\mathbb{R}$.

d. On suppose que f n'est pas continue en 0. Prouver que le graphe de f est dense dans $\mathbb{R}^2$ (cela signifie que tout point de $\mathbb{R}^2$ est adhérent au graphe de f).

e. Dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, on admet que le sous-espace vectoriel $\mathbb{Q}$ possède un supplémentaire F. On note p le projecteur sur $\mathbb{Q}$ parallèlement à F.

Montrer que p est une fonction additive discontinue en 0.
