

Corrigé du devoir en temps libre n° 5

Autour de la fonction Gamma

1. Fixons x dans $]0, +\infty[$.

La fonction $g_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

Quand t tend vers 0, on remarque que $g_x(t)$ est équivalent à $\frac{1}{t^{1-x}}$. L'inégalité $1 - x < 1$ prouve la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$.

Le critère des équivalents pour les fonctions positives montre que la fonction g_x est intégrable sur $]0, 1]$.

Remarquons maintenant que $t^{x+1}e^{-t}$ a une limite nulle quand t tend vers $+\infty$. On en déduit que $g_x(t)$ est négligeable devant $1/t^2$ quand t tend vers $+\infty$.

On sait que la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Le critère de négligeabilité montre que la fonction g_x est également intégrable sur cet intervalle.

Finalement, la fonction g_x est intégrable sur $]0, +\infty[$. En particulier, le nombre $\Gamma(x)$ est bien défini.

Soit un entier naturel n . La fonction $y \mapsto y^{x-1}(1-y)^n$ est définie, positive et continue sur $]0, 1]$. Là encore, on prouve l'intégrabilité de cette fonction en remarquant que $y^{x-1}(1-y)^n$ est équivalent à $1/y^{1-x}$ quand y tend vers 0.

2. On fixe x dans $]0, +\infty[$. On prend a et b dans $]0, +\infty[$. On intègre par parties

$$\int_a^b t^x e^{-t} dt = -b^x e^{-b} + a^x e^{-a} + x \int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On fait tendre a vers 0 puis b vers $+\infty$ et on obtient $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. Fixons x dans $]0, +\infty[$ et n dans $\mathbb{N}^*$. Prenons a dans $]0, 1]$ et intégrons par parties (on dérive $y \mapsto (1-y)^n$ et on primitive $y \mapsto y^{x-1}$ en $y \mapsto y^x/x$) :

$$\int_a^1 y^{x-1}(1-y)^n dy = -\frac{1}{x}(1-a)^n a^x + \frac{n}{x} \int_a^1 y^x (1-y)^{n-1} dy.$$

On fait tendre a vers 0, ce qui donne $B_n(x) = \frac{n}{x} B_{n-1}(x+1)$.

En itérant cette relation de récurrence, on obtient

$$B_n(x) = \frac{n}{x} \times \frac{n-1}{x+1} \times \cdots \times \frac{1}{x+n-1} B_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)(x+n)}.$$

4. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons (A_n) l'identité suivante

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad B_n(x) = \frac{\Gamma(x) \times \Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}.$$

Un calcul rapide donne $B_0(x) = \frac{1}{x}$ pour tout x dans $]0, +\infty[$ et $\Gamma(1) = 1$ donc $\frac{\Gamma(x) \times \Gamma(1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{x} = B_0(x)$ d'après la relation de la question 2.

L'identité (A_0) est donc vraie.

Soit maintenant un entier n strictement positif pour lequel l'identité (A_{n-1}) est vraie. Prenons $x > 0$. On peut écrire

$$B_n(x) = \frac{n}{x} B_{n-1}(x+1) = \frac{n}{x} \frac{\Gamma(x+1) \times \Gamma(n)}{\Gamma(x+n+1)} = \frac{\Gamma(x) \times \Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}$$

en utilisant les égalités $\frac{\Gamma(x+1)}{x} = \Gamma(x)$ et $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$.

L'identité (A_n) est démontrée.

Par récurrence, l'identité (A_n) est valable pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Commentaire. Si l'on travaille avec une seule valeur de x et qu'on ne quantifie par x dans l'énoncé de (A_n) , la récurrence ne tient pas debout car il n'est pas possible d'utiliser la formule donnant $B_{n-1}(x+1)$ si l'on a seulement fait une hypothèse sur la valeur de $B_{n-1}(x)$.

5. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit sur $]0, +\infty[$ une fonction f_n par

$$f_n(x) = \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t < n \\ 0 & \text{si } t \geq n. \end{cases}$$

(1) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ (et même continue, mais peu importe).

(2) Soit t dans $]0, +\infty[$. Pour tout entier $n > t$, on peut écrire

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right).$$

Un développement limité donne $n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) = n\left(-\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -t + o(1)$ quand n tend vers $+\infty$. Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que $f_n(t)$ tend vers $t^{x-1}e^{-t}$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $g_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$, qui est continue sur cet intervalle.

(3) Je rappelle sans démonstration l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$, valable pour tout $u > -1$.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout t dans $]0, n[$, on obtient

$$|f_n(t)| = t^{x-1} e^{n \ln(1-t/n)} \leq t^{x-1} e^{-t}.$$

Pour tout t dans $[n, +\infty[$, l'inégalité $|f_n(t)| \leq t^{x-1}e^{-t}$ est valable aussi. On a donc obtenu la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in]0, +\infty[, \quad |f_n(t)| \leq g_x(t).$$

La fonction g_x est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

Toutes ces vérifications permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée, pour conclure que $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} g_x(t) dt$ quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \Gamma(x).$$

6. Étant donné un entier $n \geq 2$, on trouve

$$\gamma_n - \gamma_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 2} (\gamma_n - \gamma_{n-1})$ converge absolument, si bien qu'elle converge.

Pour tout entier $n \geq 2$, on peut écrire $\gamma_n = \gamma_1 + \sum_{k=2}^n (\gamma_k - \gamma_{k-1})$. On en déduit que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le nombre $\gamma_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} (\gamma_k - \gamma_{k-1})$.

7. Soit x dans $]0, +\infty[$. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

$$v_n(x) = \frac{(x+1) \cdots (x+n)}{n!} \exp \left(-x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = \frac{(x+1) \cdots (x+n)}{n!} e^{-x\gamma_n - x \ln(n)} = \frac{x(x+1) \cdots (x+n)}{n! \times n^x} \times \frac{e^{-x\gamma_n}}{x}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = \frac{\exp(-\gamma x)}{x\Gamma(x)}.$$

8. Soit x dans $]0, +\infty[$. On remarque que $\ln(\Gamma(x)) + \gamma x + \ln(x)$ est la limite quand N tend vers $+\infty$ de $-\ln(v_N(x))$, c'est-à-dire de $-\sum_{n=1}^N \left[\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right]$.

On a donc montré l'égalité demandée

$$\ln(\Gamma(x)) = -\gamma x - \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right].$$

9. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, introduisons la fonction $f_n : x \mapsto \frac{x}{n} - \ln(1 + \frac{x}{n})$, définie notamment sur $[0, +\infty[$.

(1) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, avec

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f'_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

(2) La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

(3) Soit $a > 0$. La fonction f'_n est croissante et positive sur $[0, a]$ donc

$$\|f'_n\|_{\infty, [0, a]} = f'_n(a) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a} = \frac{a}{n(n+a)} \leq \frac{a}{n^2}.$$

La série de terme général a/n^2 est convergente donc, par domination, la série de terme général $\|f'_n\|_{\infty, [0, a]}$ est convergente.

On en déduit que la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[0, a]$.

Ces trois vérifications permettent d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme : la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$. C'est vrai pour tout $a > 0$ donc cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. De plus, sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme.

La formule de la question 8 permet d'en déduire que la fonction $\ln \circ \Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Par composition avec l'exponentielle, on en déduit que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. En dérivant l'identité de la question 8, il vient

$$\forall x > 0, \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

En particulier, l'évaluation pour $x = 1$ donne $\Gamma'(1) = -\gamma - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Un télescopage donne $\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}$. En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient la valeur $\Gamma'(1) = -\gamma$.

10. Pour tout x dans $]0, 1[$, posons $a(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin(\pi x)$. En dérivant, on obtient pour tout x dans $]0, 1[$ l'égalité

$$a'(x) = \Gamma'(x)\Gamma(1-x)\sin(\pi x) - \Gamma(x)\Gamma'(1-x)\sin(\pi x) + \pi\Gamma(x)\Gamma(1-x)\cos(\pi x) = a(x) \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} + \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \right).$$

Soit x dans $]0, 1[$. Utilisons la formule de la question 9 et la formule admise dans l'énoncé de la question 10

$$\frac{a'(x)}{a(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) + \gamma + \frac{1}{1-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1-x} \right) + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

Une première série de simplifications donne

$$\frac{a'(x)}{a(x)} = \frac{1}{1-x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1-x} - \frac{1}{n+x} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

En écrivant $2x = x - n + x + n$, il vient $\frac{2x}{x^2 - n^2} = \frac{1}{x-n} + \frac{1}{n+x}$ donc

$$\frac{a'(x)}{a(x)} = \frac{1}{1-x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1-x} - \frac{1}{n-x} \right).$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Un télescopage donne $\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+1-x} - \frac{1}{n-x} \right) = \frac{1}{N+1-x} - \frac{1}{1-x}$. En faisant tendre N vers $+\infty$, il vient $a'(x)/a(x) = 0$ donc $a'(x) = 0$.

C'est vrai pour tout x dans l'intervalle $]0, 1[$ donc la fonction a est constante. La valeur de cette constante est donnée par

$$a(1/2) = \Gamma(1/2)^2 \times 1 = \pi.$$

On a alors prouvé l'égalité $\Gamma(x) \times \Gamma(1-x) = \pi / \sin(\pi x)$ pour tout x dans $]0, 1[$.

Exercice 1. 1. La fonction $f : v \mapsto \frac{\ln(v)}{1-v}$ est définie et continue sur l'intervalle $]0, 1[$. Elle admet la limite finie -1 en 1 donc elle est intégrable sur $[1/2, 1[$. De plus, on observe que $f(v)$ est équivalent à $\ln(v)$ quand v tend vers 0 ; on sait que la fonction $\ln$ est intégrable sur $]0, 1/2]$ donc f l'est aussi.

Finalement, la fonction f est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$, ce qui justifie l'existence de l'intégrale $\int_0^1 f$.

2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : v \mapsto \frac{1-v^{1/n}}{1-v}$ est définie et continue sur $[0, 1[$. Quand v tend vers 1, on observe que $f_n(v)$ tend vers $g'_n(1)$, où g_n est la fonction $t \mapsto t^{1/n}$, ce qui donne $g'_n(1) = 1/n$.

En particulier, la fonction f_n est intégrable sur $[0, 1[$.

L'intégrale $\int_0^1 f_n$ est donc convergente.

3. On peut bien sûr prouver ces inégalités par des études de fonctions. Une méthode plus directe est d'appliquer le théorème des accroissements finis.

Soit t dans $] -\infty, 0]$. La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $[t, 0]$ donc il existe c dans $[t, 0]$ tel que $1 - e^t = -t \exp'(c)$, c'est-à-dire $1 - e^t = -t \exp(c)$.

L'encadrement $t \leq c \leq 0$ donne $e^t \leq e^x \leq 1$ puis

$$-t e^t \leq 1 - e^t \leq -t$$

car $-t \geq 0$.

4. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Soit v dans $]0, 1[$. Commençons par repérer l'égalité $1 - v^{1/n} = 1 - e^{\ln(v)/n}$. Le nombre $\ln(v)/n$ est négatif donc l'encadrement de la question précédente donne

$$-\frac{\ln(v)}{n} v^{1/n} \leq 1 - v^{1/n} \leq -\frac{\ln(v)}{n}.$$

On en déduit l'encadrement

$$-\frac{1}{n} \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(v)}{1-v} v^{1/n} dv}_{\text{noté } J_n} \leq I_n \leq -\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(v)}{1-v} dv.$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, introduisons la fonction

$$g_n : v \mapsto \frac{\ln(v)}{1-v} v^{1/n},$$

définie sur $]0, 1[$.

(1) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction g_n est définie et continue sur $]0, 1[$.

(2) La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers la fonction f de la première question.

(3) On observe la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall v \in]0, 1[, \quad |g_n(v)| \leq |f(v)|.$$

La fonction f est continue et intégrable sur $]0, 1[$, comme on l'a vu à la première question.

Ces trois vérifications permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée, qui donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(v) dv = \int_0^1 f(v) dv = \alpha.$$

Réécrivons maintenant l'encadrement précédent sous la forme

$$\int_0^1 g_n(v) dv \geq -n I_n \geq \alpha.$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure que $-n I_n$ tend vers α quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que I_n est équivalent à $-\alpha/n$.

5. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout x dans $[0, 1[$, on connaît la relation

$$1 + x + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

On en déduit une réécriture de u_n sous la forme

$$u_n = \int_0^1 \frac{1 - x}{1 - x^n} x^{n-1} dx.$$

On effectue le changement de variable $v = x^n$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, et on obtient

$$u_n = \int_0^1 \frac{1 - v^{1/n}}{1 - v} \frac{dv}{n} = \frac{I_n}{n}.$$

On en déduit que u_n est équivalent à $-\alpha/n^2$ quand n tend vers $+\infty$. La série de terme général u_n est donc convergente.

Exercice 2. Question 1. La fonction $\| \cdot \|$ est à valeurs réelles positives.

Soit $u \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\|u\| = 0$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on obtient

$$0 \leq |u_n| \leq \|u\| = 0 \quad \text{donc} \quad u_n = 0.$$

Ainsi, la suite u est le vecteur nul de $\ell^\infty(\mathbb{R})$. La propriété de séparation est vérifiée.

Soit $u \in \ell^\infty(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on obtient

$$|\lambda u_n| = |\lambda| \times |u_n| \leq |\lambda| \times \|u\|.$$

On en déduit la majoration $\|\lambda u\| \leq |\lambda| \times \|u\|$.

Si λ est nul, l'égalité $\|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$ est valable car les deux termes valent 0.

On suppose maintenant que λ est non nul. Le même raisonnement que ci-dessus, en remplaçant (u, λ) par $(\lambda u, 1/\lambda)$, donne la majoration

$$\left\| \frac{1}{\lambda} \times \lambda u \right\| \leq \frac{1}{\lambda} \times \|\lambda u\| \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|u\| \leq \frac{1}{\lambda} \|\lambda u\|.$$

On obtient donc l'égalité $\|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$ dans tous les cas.

La fonction $\| \cdot \|$ est positivement homogène.

Enfin, prenons u et v dans $\ell^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ donne

$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \|u\| + \|v\|$$

donc $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. L'inégalité triangulaire est vérifiée.

Toutes ces vérifications prouvent que $\| \cdot \|$ est une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

Question 2. Pour la fonction N , les vérifications sont bien plus directes et j'ai la flemme de les rédiger. Je mentionne toutefois qu'il est nécessaire de justifier l'existence de la somme $N(u)$.

Pour cela, on peut remarquer que pour toute suite bornée u , on a la domination

$$\frac{|u_n|}{2^n} = \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right)$$

et que la série $\sum (1/2)^n$ est une série géométrique convergente (sa raison est dans $] -1, 1[$), ce qui prouve la convergence de la série $\sum |u_n|/2^n$.

Question 3. Soit $u \in \ell^\infty(\mathbb{R})$. Chaque terme $|u_n|$ est majoré par $\|u\|$ et on obtient donc directement

$$N(u) \leq \|u\| \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \|u\| \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \|u\| \times 2.$$

On a utilisé la formule donnant la somme d'une série géométrique lorsque sa raison (ici égale à $1/2$) est de module strictement inférieure à 1.

Question 4. Pour tout i dans $\mathbb{N}$, on trouve

$$N(\delta_i) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\delta_{i,n}|}{2^n} = \frac{1}{2^i}.$$

On observe que $N(\delta_i)$ tend vers 0 lorsque i tend vers $+\infty$. La suite de suites $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge donc vers la suite nulle pour la norme N .

Question 5. On suppose que la suite $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est convergente pour la norme $\|\cdot\|$. Notons sa limite s . Pour tout i dans $\mathbb{N}$, on connaît l'encadrement

$$0 \leq N(\delta_i - s) \leq 2\|\delta_i - s\|.$$

Par le théorème des gendarmes, on peut en déduire que $N(\delta_i - s)$ tend vers 0 quand i tend vers $+\infty$. La suite $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge donc aussi vers s pour la norme N . Par unicité de la limite, cela signifie que s est la fonction nulle.

Cependant, pour tout i dans $\mathbb{N}$, on trouve $\|\delta_i\| = 1$. Ceci ne tend pas vers 0 quand i tend vers $+\infty$ donc la suite $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|$.

Cette contradiction prouve que la suite de suites $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est divergente relativement à la norme $\|\cdot\|$.

Question 6. Les normes $\|\cdot\|$ et N ne sont pas équivalentes car il existe au moins une suite qui converge pour l'une sans converger pour l'autre.

Question 7. Notons u la suite constante égale à 1.

Soit k dans $\mathbb{N}$. La suite S_k a pour terme général

$$S_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq k \\ 0 & \text{si } n > k. \end{cases}$$

On obtient donc

$$N(u - S_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|1 - S_{k,n}|}{2^n} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^k}.$$

On voit que $N(u - S_k)$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$ donc la suite de suites $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la suite u pour la norme N .

Question 8. Chacune des suites S_k est un élément de E_0 mais la suite constante égale à 1 n'appartient pas à E_0 . On dispose donc d'une suite d'éléments de E_0 qui converge vers un élément de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ n'appartenant pas à E_0 . D'après la caractérisation séquentielle des fermés, on en déduit que E_0 n'est pas un fermé de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ pour la norme N .

Question 9. On termine par la question la plus difficile du devoir. Prenons une suite $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E_0 et supposons qu'elle converge pour la norme $\| \cdot \|$ vers un certain élément s de $\ell^\infty(\mathbb{R})$. Le but est de prouver que cette suite s appartient aussi à E_0 .

Prenons deux entiers n et i choisis indépendamment. L'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ donne alors

$$|s_n| \leq |s_n - u_i| + |u_i| \leq \|s - u_i\| + |u_{i,n}|.$$

C'est là qu'il s'agit de manœuvrer habilement car on ne peut pas faire tendre i et n simultanément vers $+\infty$. C'est en réalité n qu'on doit faire tendre vers $+\infty$ donc on commence par fixer i de manière appropriée, en se cantonnant au terme qui ne dépend que de i .

Commençons par fixer $\varepsilon > 0$. La définition de la limite nous permet de choisir i dans $\mathbb{N}$ de manière à avoir $\|s - u_i\| \leq \varepsilon/2$. On obtient donc, pour cet indice i fixé, la majoration

$$|s_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |u_{i,n}|$$

et cette inégalité est valable pour tout n dans $\mathbb{N}$. Par hypothèse, la suite u_i appartient à E_0 donc elle converge vers 0. Il existe donc un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_{i,n}| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient donc, pour tout entier $n \geq n_0$, la majoration $|s_n| \leq \varepsilon$. Plus précisément, on a démontré ceci

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |s_n| \leq \varepsilon.$$

On a donc prouvé que la suite s converge vers 0, ce qui en fait un élément de E_0 .

On a prouvé que pour la norme $\| \cdot \|$, toute suite de E_0 qui converge vers un élément de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ a sa limite dans E_0 . D'après la caractérisation séquentielle des fermés, on en déduit que E_0 est un fermé de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ pour la norme $\| \cdot \|$.

Cette propriété est un phénomène de *stabilité par convergence uniforme*.

Exercice 3. a. Commençons par repérer l'égalité

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0),$$

qui donne $f(0) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut alors obtenir l'égalité $f(nx) = nf(x)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ par récurrence. Ensuite, pour tout entier n négatif, on obtient

$$f(nx) + f(-nx) = f(0) = 0, \quad \text{donc} \quad f(nx) = -f(-nx) = -(-nf(x)) = nf(x).$$

On a donc prouvé l'égalité $f(nx) = nx$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$ et tout x dans $\mathbb{R}$.

b. Soit x dans $\mathbb{R}$. Soit q dans $\mathbb{Q}$. Il existe a dans $\mathbb{Z}$ et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que $q = a/b$. L'identité de la question a donne

$$f(qx) = f(ax/b) = af(x/b) \quad \text{et} \quad f(x) = f(bx/b) = bf(x/b)$$

donc $f(qx) = (a/b)f(x) = qf(x)$.

c. Soit x dans $\mathbb{R}$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, posons $q_n = 10^{-n} \times \lfloor 10^n x \rfloor$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, le nombre q_n est rationnel. Remarquons l'encadrement

$$\underbrace{10^{-n} \times 10^n \times x}_{=x} \leq q_n \leq \underbrace{10^{-n} \times (10^n \times x + 1)}_{=x+10^{-n}}.$$

Par le théorème des gendarmes, la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x . Pour tout n dans $\mathbb{N}$, la formule de la question b donne $f(q_n) = q_n f(1)$.

On en déduit que $f(q_n)$ tend vers $xf(1)$ quand n tend vers $+\infty$. Maintenant, observons l'égalité

$$f(x) = f(q_n) + f(x - q_n).$$

La différence $x - q_n$ tend vers 0, donc, par continuité de f en 0, la suite de terme général $f(x - q_n)$ tend vers $f(0)$, c'est-à-dire vers 0. Par unicité de la limite, on obtient donc l'égalité $f(x) = xf(1)$.

Cette égalité est valable pour tout x réel.

d. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On doit prouver que (a, b) est dans l'adhérence du graphe de f , autrement dit qu'il existe une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite de terme général $(u_n, f(u_n))$ converge vers (a, b) .

Rappelons la définition quantifiée de la continuité en 0

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in [-\alpha, \alpha], \quad |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon.$$

Ici, on sait que $f(0)$ est nul et que f n'est pas continue en 0. La proposition suivante est donc vraie

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \alpha > 0, \quad \exists x \in [-\alpha, \alpha], \quad |f(x)| > \varepsilon.$$

Donnons-nous donc un tel ε . Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on peut choisir x_n dans $[-2^{-n}, 2^{-n}]$ tel que $|f(x_n)| \geq \varepsilon$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite converge vers 0 par le théorème des gendarmes mais il n'y a aucune raison pour que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prenons un nombre rationnel q_n dans l'intervalle $\left] \frac{\varepsilon}{|f(x)| (1+2^{-n})}, \frac{\varepsilon}{|f(x)|} \right[$.

C'est possible car cet intervalle est ouvert et non vide. Posons ensuite $y_n = x_n q_n$. Le choix de q_n donne l'encadrement $0 \leq q_n \leq 1$ donc la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

De plus, la question b donne $f(y_n) = q_n f(x_n)$ donc $\varepsilon < |f(y_n)| \leq \varepsilon(1 + 2^{-n})$.

Par le théorème des gendarmes, la suite $(|f(y_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ε . La fonction f est impaire donc, quitte à changer y_n en $-y_n$ pour certaines valeurs de n , la suite $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ε .

La fonction f n'est pas la fonction nulle donc on peut fixer $x > 0$ tel que $f(x) \neq 0$. Prenons maintenant une suite rationnelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite a/x et une suite rationnelle $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite $(b - af(x)/x)/\varepsilon$, et posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a_n x + b_n y_n.$$

Par construction, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a . Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on trouve

$$f(u_n) = a_n f(x) + b_n f(y_n),$$

si bien que la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers

$$a \times \frac{f(x)}{x} + \frac{1}{\varepsilon} \left(b - a \frac{f(x)}{x} \right) \times \varepsilon = b.$$

Ainsi, la suite de terme général $(u_n, f(u_n))$ converge vers l'élément (a, b) .

On a prouvé que le graphe de f est dense dans $\mathbb{R}^2$.

e. La fonction p est $\mathbb{Q}$ -linéaire donc elle est additive. Elle n'est pas de la forme $x \mapsto ax$ pour un certain a . En effet, si c'était le cas, l'égalité $f(1) = a$ donnerait $a = 1$ et l'égalité $f(\sqrt{2}) = a\sqrt{2}$ donnerait $a = 0$.

Par la contraposée du résultat de la question c, la fonction p ne peut pas être continue en 0.