

Exercice 1. (*) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient f et g deux endomorphismes de E . On suppose que f et g commutent, ce qui s'écrit

$$f \circ g = g \circ f.$$

Montrer que $\text{Ker}(g)$ est stable par f .

Exercice 2. (*) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E .

On suppose que pour tout x de $E \setminus \{0\}$, il existe $\lambda(x)$ dans $\mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda(x)x$.

Montrer que la fonction λ est constante.

Exercice 3. (*) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E . On suppose que f commute avec tous les endomorphismes de E , ce qui s'écrit

$$\forall g \in \mathcal{L}(E), \quad f \circ g = g \circ f.$$

Montrer que f est une homothétie, ce qui signifie qu'il existe μ dans $\mathbb{K}$ tel que f soit l'endomorphisme μId_E .

Indication. Utiliser le fait que f commute avec les projecteurs sur les droites et exploiter les résultats des deux exercices précédents.

Exercice 4. (*) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E . Soient a et b deux éléments de $\mathbb{K}$ distincts.

Prouver l'égalité

$$\text{Ker}((f - a\text{Id}_E) \circ (f - b\text{Id}_E)) = \text{Ker}(f - a\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - b\text{Id}_E).$$

Exercice 5. (*) On note D l'endomorphisme $f \mapsto f'$ de l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

a. Pour tout a dans $\mathbb{C}$, déterminer une base de l'espace vectoriel $\text{Ker}(D - a\text{Id}_E)$.

b. Soient a et b distincts dans $\mathbb{C}$. Donner une base de l'espace vectoriel $\text{Ker}((D - a\text{Id}_E) \circ (D - b\text{Id}_E))$ en utilisant le résultat de l'exercice précédent.

c. Quelle propriété classique sur les équations différentielles vient-on de démontrer ?

Exercice 6. (*) On note δ l'opérateur décalage

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

de l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

a. Pour tout a dans $\mathbb{C}$, déterminer une base de l'espace vectoriel $\text{Ker}(\delta - a\text{Id}_E)$.

b. Soient a et b distincts dans $\mathbb{C}$. À l'aide du résultat de l'avant-dernier exercice, donner une base de l'espace vectoriel $\text{Ker}((\delta - a\text{Id}_E) \circ (\delta - b\text{Id}_E))$.

c. Quelle propriété classique sur les suites récurrentes vient-on de démontrer ?

Exercice 7. (*) On définit de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ les fonctions

$$a : x \mapsto x, \quad b : x \mapsto x^2, \quad c : x \mapsto x \ln(x), \quad d : x \mapsto x^2 \ln(x).$$

On note F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{C} = (a, b, c, d)$.

Pour tout élément f de F , on note $T(f)$ la fonction $x \mapsto xf'(x)$.

a. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de F .

b. Montrer que T est un endomorphisme de F et déterminer sa matrice relativement à la base $\mathcal{C}$.

c. L'endomorphisme T est-il un automorphisme de F ?

Exercice 8. (*) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On suppose que le rang de M vaut 1.

Montrer alors qu'il existe des matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ telles que $M = X \cdot Y^T$.

Exercice 9. ()** Pour tout a réel, on considère la fonction $f_a : x \mapsto |x - a|$, qui est un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver que la famille $\mathcal{F}_n = (f_0, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 10. ()** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On suppose que F et G ont la même dimension. Prouver alors qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E qui soit à la fois un supplémentaire de F et de G .

Exercice 11. ()** Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. On pose $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$.

Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E . On définit

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(E, F) ; E_1 \subset \text{Ker}(u)\}.$$

a. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

b. Rappeler pourquoi il est possible de considérer une base $\mathcal{E}$ de E telle que les premiers vecteurs de cette base constituent une base de E_1 . Une telle base de E s'appelle une *base de E adaptée au sous-espace vectoriel E_1* .

c. On se donne une base $\mathcal{E}$ de E adaptée au sous-espace vectoriel E_1 et une base $\mathcal{F}$ de F . On rappelle que l'application

$$\varphi : u \mapsto M_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$$

est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Déterminer $\varphi(\mathcal{A})$.

d. En déduire la dimension de $\mathcal{A}$.

Exercice 12. ()** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On pose $n = \dim(E)$. Soit u un endomorphisme de E .

On fait l'hypothèse $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$.

a. Montrer que n est un entier pair. On pose $r = n/2$.

b. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E relativement à laquelle la matrice de u s'écrit par blocs

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_r & I_r \\ 0_r & 0_r \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. ()** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A n'est pas inversible. Montrer alors qu'il existe une matrice B non nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que les produits $A \cdot B$ et $B \cdot A$ soient nuls tous les deux.

Exercice 14. ()** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a. Montrer que la famille de matrices $(I_n, A, \dots, A^{n^2})$ est liée.

b. Dans cette question, on suppose que la matrice A est inversible. Montrer que la matrice A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A (c'est-à-dire une combinaison linéaire de puissances de la matrice A).

Exercice 15. (*)** On note $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers. Les premiers termes en sont

$$p_0 = 2, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \quad p_3 = 7.$$

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que la famille $(\ln(p_0), \dots, \ln(p_n))$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$.

b. En déduire que le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$ n'est pas de dimension finie.