Devoir de vacances de mathématiques — PC*

Problème 1 — intégrales de Wallis et équivalent de Stirling (*)

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Le but de ce problème est de calculer cette intégrale et d'étudier la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis d'en déduire un équivalent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$.

Première partie : les calculs classiques sur les intégrales de Wallis

Question 1. Montrer que la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que tous ses termes sont strictement positifs.

Question 2. Calculer les intégrales W_0 et W_1.

Question 3. Au moyen d'une intégration par parties, obtenir la relation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+2)\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)\mathrm{W}_n.$$

Question 4. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver l'encadrement suivant

$$\frac{n+1}{n+2}\,\mathrm{W}_n \leqslant \mathrm{W}_{n+1} \leqslant \mathrm{W}_n.$$

Question 5. Montrer que la suite $((n+1)\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et préciser la valeur de cette constante.

Question 6. Montrer que W_n est équivalent à $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 7. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, prouver les relations suivantes

$$\mathrm{W}_{2p} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p} \times (p!)^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{W}_{2p+1} = \frac{2^{2p} \times (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Deuxième partie : l'équivalent de Stirling

Le but de cette partie est de prouver que $n!$ est équivalent à $n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $q_n = \dfrac{n!}{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}$ et $u_n = \ln(q_n)$.

Question 8. Pour tout entier $n \geqslant 2$, prouver l'égalité $u_n - u_{n-1} = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + 1$.

Question 9. Prouver que $u_n - u_{n-1}$ est équivalent à $-\dfrac{1}{12n^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 10. Justifier que la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Question 11. En déduire que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une limite finie ℓ strictement positive.

Question 12. En écrivant de deux manières la limite de $\sqrt{2p}\,\mathrm{W}_{2p}$ quand p tend vers $+\infty$, obtenir l'égalité $\ell = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 1. (*) On pose $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/7}$ puis

$$\mathrm{S} = \omega + \omega^2 + \omega^4 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T} = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

Question 13. Calculer $\mathrm{S}+\mathrm{T}$ et ST.

Question 14. En déduire les valeurs de S et de T.

Problème 2 (*)

Première partie (quelques calculs préliminaires)

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{B}, \mathrm{C})$. On note φ la restriction de g à $\mathrm{Im}(f)$.

Question 15. Justifier les inclusions $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Question 16. Démontrer les égalités $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(g \circ f)$.

Question 17. On suppose que A est de dimension finie. Montrer l'égalité $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g \circ f)$.

Deuxième partie (rang des itérés d'un endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E. On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la notation u^k désigne l'itérée k-ième d'ordre k, c'est-à-dire la composée $u \circ \cdots \circ u$, dans laquelle la lettre u apparaît k fois. En particulier, la notation u^0 désigne Id_{E}. On note n la dimension de E.

Question 18. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer les inclusions $\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k)$.

Question 19. Montrer que la suite de terme général $\delta_k = \mathrm{rg}(u^k) - \mathrm{rg}(u^{k+1})$ est décroissante.

Question 20. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant p$, on ait $\delta_k = 0$. Dans la suite, on choisit p minimal pour cette propriété.

Question 21. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^p)$ et $\mathrm{Im}(u^p)$ sont supplémentaires dans E.

Question 22. On note v la restriction de u à $\mathrm{Im}(u^p)$. Montrer que v est un automorphisme de $\mathrm{Im}(u^p)$.

Troisième partie (endomorphismes nilpotents)

On reprend les notations de la deuxième partie, notamment l'endomorphisme u de E et l'entier p. On suppose de plus que u est *nilpotent*, ce qui signifie qu'il existe un entier s tel que u^s soit l'application nulle.

Question 23. Montrer que u^p est l'application nulle mais pas u^{p-1}.

Question 24. Montrer l'inégalité $p \leqslant n$.

Question 25. Dans cette question, on ajoute l'hypothèse $p = n$. On considère un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$ et on lui associe la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$.

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E et écrire la matrice de u relativement à cette base.

Exercice 2. (*) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Soit $\lambda \geqslant 0$. On note $\lambda\mathrm{A}$ l'ensemble $\{\lambda x \ ; \ x \in \mathrm{A}\}$.

Montrer l'égalité $\sup(\lambda\mathrm{A}) = \lambda \times \sup(\mathrm{A})$.

Exercice 3. (*) Soit M une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que M^{T} commute avec M.

Montrer que M est diagonale.

Exercice 4. (*) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$.

Justifier l'égalité $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k)$.

Exercice 5. (***) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe une suite extraite de la suite complexe $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

Problème 4 — inégalité de Jensen (*)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial. Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$, supposée convexe.

Question 26. (**) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, prouver l'énoncé (C_n) suivant : pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de I, pour tout n-uplet $(t_1, \ldots, t_n)$ d'éléments de $[0, 1]$ dont la somme vaut 1, l'inégalité

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)$$

est valable.

On raisonnera par récurrence.

Question 27. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose que l'univers image $\mathrm{X}(\Omega)$ est inclus dans I. Montrer alors l'inégalité

$$f(\mathbb{E}(\mathrm{X})) \leqslant \mathbb{E}(f(\mathrm{X})).$$

Question 28. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de nombres strictement positifs, justifier l'*inégalité arithmético-géométrique*

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Problème 5 — théorème de Cesàro (**)

Question 29. (***) On considère une suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose que cette suite converge et on note sa limite ℓ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $m_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$. Montrer que la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

Cette propriété est le *théorème de Cesàro.*

Question 30. Soit $a > 0$. On considère une fonction $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ à valeurs positives. On suppose qu'il existe des constantes $\lambda \neq 0$ et $p > 1$ telles que

$$f(x) = x + \lambda x^p + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^p).$$

Trouver un exposant α tel que $(f(x))^\alpha - x^\alpha$ possède une limite finie et non nulle lorsque x tend vers 0.

Question 31. On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en prenant $u_0 \in]0, \pi/2]$ et en posant $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

b. Trouver un exposant α tel que la suite de terme général $(u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha$ possède une limite finie et non nulle.

c. À l'aide du théorème de Cesàro, en déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6. (**) Soit $z \in \mathbb{C}$. On l'écrit sous la forme $x + \mathrm{i}y$, où (x, y) est un élément de $\mathbb{R}^2$.

Question 32. Montrer qu'il existe un entier n_z strictement positif tel que pour tout entier $n \geqslant n_z$, le nombre $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ admette $n \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y}{x+n}\right)$ pour argument.

Question 33. En déduire que la suite de terme général $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ converge vers e^z.

Problème 6 — réarrangement de la somme d'une suite sommable (***)

On considère une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose que la série $\sum z_n$ est absolument convergente. Le but de cet exercice est de prouver que pour toute bijection φ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, la série $\sum z_{\varphi(n)}$ converge absolument et qu'elle a la même somme que la série $\sum z_n$.

On considère donc une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et on pose $\mathrm{S} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$.

On fixe $\varepsilon > 0$.

Question 34. Prouver qu'il existe un entier n_0 vérifiant la propriété

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \sum_{k=n}^{+\infty} |z_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Question 35. Prouver qu'il existe un entier n_1 tel que l'inclusion

$$[\![0, n_0]\!] \subset \{\varphi(0), \dots, \varphi(n_1)\}$$

soit vraie.

Question 36. Pour tout entier $n \geqslant n_1$, prouver la majoration

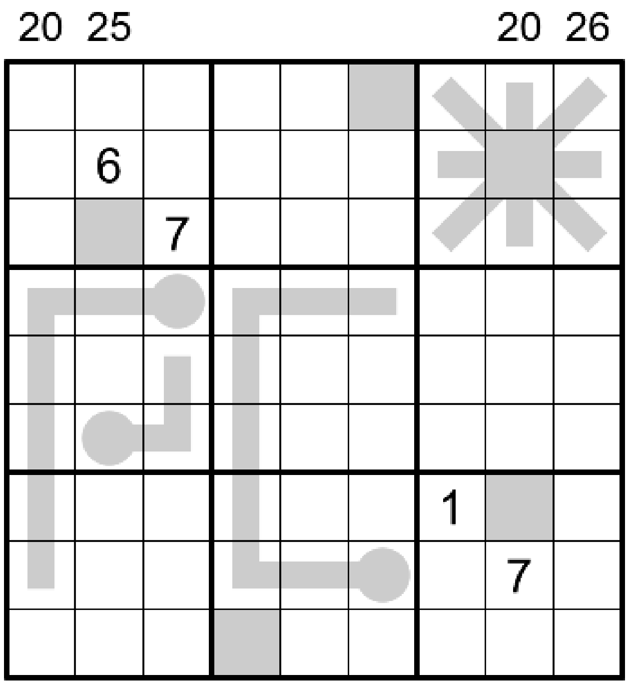
$$\left| \mathrm{S} - \sum_{k=0}^{n} z_{\varphi(k)} \right| \leqslant \varepsilon.$$

Question 37. Conclure.

Sudoku « PC* 2024-2025 »

Placer dans chaque case un chiffre entre 1 et 9 de sorte que chaque ligne, chaque colonne et chaque carré 3×3 délimité en gras contiennent exactement une fois chaque chiffre.
Thermo. Le long de chaque thermomètre, les chiffres augmentent strictement en partant du bulbe. L'étoile dans le coin supérieur droit est la superposition de huit thermomètres issus du centre de l'étoile.
Sandwich. Chaque nombre dans la marge est la somme des chiffres pris en sandwich entre le 1 et le 9 de la ligne/colonne correspondante.
Fortress. Lorsqu'une case grise partage une arête avec une case blanche, le plus grand des deux chiffres correspondants est dans la case grise.

Lien (cliquable) pour résoudre ce problème en ligne : `https://tinyurl.com/25xp2qd8`



Pour me contacter : `edouardlebeau-pc@yahoo.fr` ou `edouardlebeau.nancy` sur Discord.

Site de la classe (lien cliquable) : `https://cahier-de-prepa.fr/pc*-poincare`