

I. Phénoménologie des transferts thermiques

1. Température locale

Dans un système à l'équilibre la température est uniforme (variable d'état). Dans un système hors équilibre T évolue dans l'espace et dans le temps: température locale: $T(\Pi, t)$.

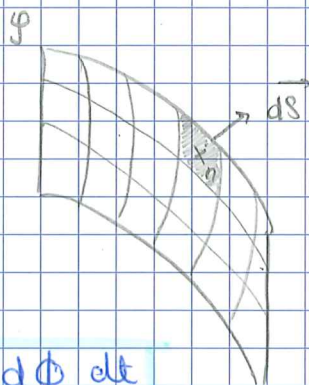
2. Différents types de transferts thermiques

De manière irréversible la température tend à s'homogénéiser grâce à des échanges thermiques:

cf poly.

Dans ce chapitre, on étudie surtout la conduction.

3. Flux thermique et vecteur $\vec{j}$



Pendant dt , le transfert thermique algébrisé au travers de dS vaut

$$\underbrace{\delta^2 Q}_{[J]} = \underbrace{\vec{j}(\Pi, t)}_{[J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}]} \cdot \underbrace{d\vec{S}}_{[m^2]} dt$$

$$\delta^2 Q = d\phi dt$$

$$\text{avec } d\phi = \vec{j}(\Pi, t) \cdot d\vec{S}$$

$$\underbrace{[J \cdot s^{-1}]}_{\text{ou } [W]}$$

Au travers de Φ , le flux thermique :

$$\underbrace{\Phi}_{[W]} = \int d\Phi = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Le transfert thermique est : $\partial Q = \Phi dt$.

La plupart du temps $\Phi = \pm jS$.

4. Loi de Fourier

cf. Figure 1

Loi phénoménologique de Fourier :

$$\underbrace{\vec{j}(\vec{r}, t)}_{[Wm^{-2}]} = -\underbrace{\lambda}_{[Wm^{-1}K^{-1}]} \underbrace{\text{grad}}_{[m^{-1}]} (\underbrace{T(\vec{r}, t)}_{[K]})$$

λ (conductivité thermique) dépend du matériau.

cf. Table 1.

5. Loi de Newton (HP : rappelée dans les exos)

Pour trouver T on a souvent besoin de CB. On peut avoir :

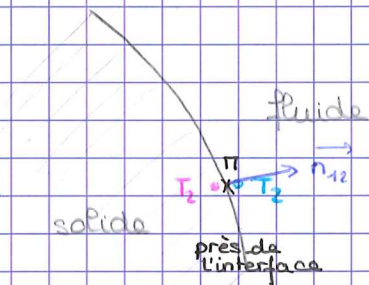
- T continue
- $\vec{j}$ continu

A l'interface d'un solide et d'un fluide, on peut utiliser la loi de Newton :

on postule : $\vec{j}(\vec{r}) = h (T_1 - T_2) \vec{n}_{12}$

h dépend du solide, du fluide et de l'écoulement.

Cela fournit une condition de bord avec discontinuité de température.



Méthode employée dans ce chapitre

On effectue un bilan d'énergie en appliquant le premier principe à un domaine habilement choisi.

En régime variable, choisir un domaine infinitésimal

En régime stationnaire, un domaine étendu est souvent plus habile.

III- Etude de régimes stationnaires

1. Régime stationnaire et conservation du flux

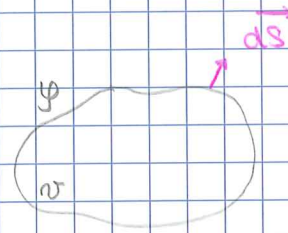
En Régime stationnaire, la température ne dépend pas du temps, de même que toutes variables / fonctions d'état.

On exclut pour l'instant tout échange de travail ou tout terme source.

→ conduction pure.

Pendant dt , on a soit :

$$\begin{aligned}\delta Q &= - \oint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S} \, dt \\ &= - \phi \, dt\end{aligned}$$



1^{er} PP : appliqué à V :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

Ici, RS donc $dU = 0$ donc $\delta Q = 0$ donc $\phi = 0$

$$\text{donc } \oint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

En régime stationnaire de conduction pure, $\vec{j}$ est à flux conservatif.

Il y a compensation des gains et des pertes.

2. Diffusion unidimensionnelle

hypothèses : $T = T(x)$ $\vec{j} = j(x) \vec{u}_x$
 $j(x) = -\lambda \frac{dT}{dx}$

On cherche $T(x)$, $x \in [0, L]$?

cf. Figure 2

Pendant dt , V reçoit : $\delta Q = S j(x) dt - S j(x') dt$
 $\delta Q = S dt (j(x) - j(x'))$

1^{er} PP : $dU = \delta Q + \delta W$

RS : $dU = 0$ donc $\delta Q = 0$ donc $j(x) = j(x')$

$\exists j_0, \forall x \in [0, L], j(x) = j_0$

$$-\lambda \frac{dT}{dx} = j_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{j_0}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{j_0}{\lambda} x + C$$

CB $\begin{cases} T(0) = T_1 & C = T_1 \\ T(L) = T_2 & -\frac{j_0}{\lambda} L + T_1 = T_2 \end{cases} \quad \frac{-j_0}{\lambda} = \frac{T_2 - T_1}{L}$

$$T = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

$$j_0 = \frac{\lambda}{L} (T_1 - T_2)$$

permet de connaître le flux au travers du mur
 $\Rightarrow$ plus utile.

3. Exemple à symétrie cylindrique

cf. Figure 3

On cherche $T(r)$ avec $r \in [R_1, R_2]$

$$\vec{j} = j(r) \vec{u}_r \quad j(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}$$

Système de la figure 3.

Pendant dt , $\vec{J}$ reçoit :

$$\delta Q = - \oint \vec{J} \cdot d\vec{S} dt$$

$$= j(r) S(r) dt - j(r') S(r') dt$$

avec $S = 2\pi r h$ l'aire d'un cylindre

$$1^{\text{er}} \text{ pp. } dU = \delta Q + \delta W$$

$$RS : dU = 0$$

$$\text{donc } \delta Q = 0$$

$$\text{donc } j(r) S(r) = j(r') S(r') \text{ pour tout } (r, r') \in [R_1, R_2]^2$$

$$\exists \Phi_0, \forall r, j(r) S(r) = \Phi_0$$

$$j(r) = \frac{\Phi_0}{S(r)} = \frac{\Phi_0}{2\pi r h}$$

$$\text{loi de Fourier: } \frac{dT}{dr} = \frac{-j}{\lambda} = \frac{-\Phi_0}{2\pi \lambda h} \cdot \frac{1}{r}$$

$$T = \underbrace{\frac{-\Phi_0}{2\pi \lambda h}}_{\text{noté } A} \ln r + C$$

$$CB \quad \begin{cases} T(R_1) = T_1 & \Rightarrow A \ln(R_1) + C = T_1 \\ T(R_2) = T_2 & \Rightarrow A \ln(R_2) + C = T_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)} \\ C = \frac{T_2 \ln(R_1) - T_1 \ln(R_2)}{\ln(R_1/R_2)} \end{cases}$$

variante : $r' = r + dr$

$$\delta Q = j(r) 2\pi r h dt - j(r+dr) 2\pi (r+dr) h dt$$

$$dU = 0, \delta Q = 0, \text{ etc.}$$

$$j(r) 2\pi r h - j(r+dr) 2\pi (r+dr) h = 0$$

$$(r+dr) j(r+dr) - r j(r) = 0$$

$$d(r j(r)) = 0$$

$$\exists K_0, r j(r) = K_0$$

⚠ ne pas oublier $(r+dr)$ dans la 2^{ème} surface.

4. Formulation locale par l'opérateur divergence

cf Figure 4

$$T(x) \quad \vec{j} = j(x) \vec{u}_x$$

$$\begin{aligned} \delta Q &= S j(x) dt - S j(x+dx) dt \\ &= -S \left[\underbrace{j(x+dx) - j(x)}_{\frac{dj}{dx}} \right] dt \, dx \\ &= -S \, dx \, \frac{dj}{dx} \, dt \end{aligned}$$

$$1^{\text{er}} \text{ pp: } dU = \delta Q + \delta W$$

$$\text{RS donc } dU = 0 \quad \text{donc } \delta Q = 0$$

$$\text{donc } \frac{dj}{dx} = 0$$

$$j = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

* Cas à 3d:

$$T(x, y, z)$$

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} j_x(x, y, z) \\ j_y(x, y, z) \\ j_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour un pavé infinitésimal, on a: } \delta^2 Q &= - \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} \, dt \\ &= -d\Phi \, dt \end{aligned}$$

$$\text{avec } d\Phi = \text{div}(\vec{j}) \, dV$$

ensuite adom.

$$\text{donc } \delta Q = 0 \quad \text{donc } d\Phi = 0 \quad \text{donc } \text{div } \vec{j} = 0$$

$\vec{j}$ est à flux conservatif

$$\vec{j} = -\lambda \text{grad } T$$

$$\text{div}(\text{grad } T) = 0$$

$$\Delta T = 0$$

Laplacien

équation de la chaleur

RS sans terme source

$$\Delta T = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dT}{dx} \right) = 0$$

$$x \frac{dT}{dx} = K \quad \frac{dT}{dx} = \frac{K}{x}$$

$$T = K \ln x + C$$

5. Exemple de situation avec source volumique d'énergie

cf. Figure 5

p en $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ dans la boule

Hypothèse RS, $T(x)$? avec $x \in [0, \infty[$

$$\vec{j} = j(x) \vec{e}_x$$

système : boule de rayon x

1^{er} cas : $x \leq R$

Pendant dt , il se agit :

$$\begin{aligned} \delta Q_e &= - \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} \, dt \\ &= -j(x) \times 4\pi x^2 \, dt \end{aligned}$$

$$\delta Q_{\text{rad}} = p \times \frac{4\pi x^3}{3} \, dt$$

$$\underbrace{dU}_{\text{RS}=0} = \delta Q + \delta W$$

$$\delta Q = 0$$

$$\delta Q_e + \delta Q_{\text{rad}} = 0$$

$$-j(x) 4\pi x^2 \, dt + p \frac{4\pi x^3}{3} \, dt = 0$$

$$j(x) = \frac{p x}{3}$$

Loi de Fourier : $\frac{dT}{dx} = \frac{-j}{\lambda_u} = \frac{-p x}{3 \lambda_u}$ pour ^{235}U

$$T = - \frac{p x^2}{6 \lambda_u} + T_1$$

2^{ème} cas $x \gg R$.

$$\delta Q_e = -j(x) \times 4\pi x^2 dt$$

$$\delta Q_{rad} = p \times \frac{4}{3} \pi R^3 dt$$

$$\delta Q_e + \delta Q_{rad} = 0$$

$$-j(x) 4\pi x^2 dt + p \frac{4}{3} \pi R^3 dt = 0$$

$$j = \frac{pR^3}{3x^2}$$

loi de Fourier: $\frac{dT}{dx} = -\frac{pR^3}{3\lambda_{eau} x^2}$

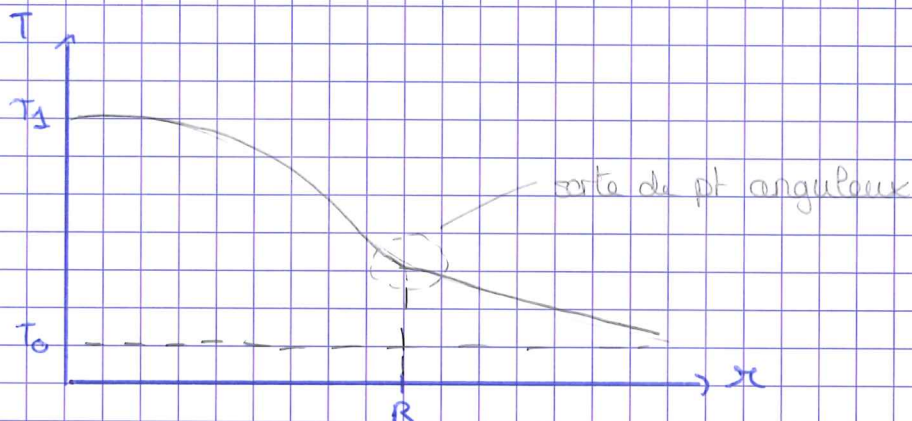
$$T = \frac{pR^3}{3\lambda_{eau} x} + C$$

CB: $T(\infty) = T_0 \Rightarrow C = T_0$

la température est continue en R :

$$T_0 + \frac{pR^3}{3\lambda_{eau} R} = T_1 - \frac{pR^3}{6\lambda_u}$$

$$T_1 = T_0 + \frac{pR^3}{3\lambda_{eau}} + \frac{pR^3}{6\lambda_u}$$

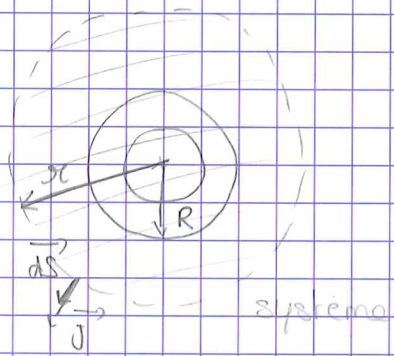


III - Résistance thermique (concerne les RS)

1. Concepts de résistance et de conductance

RS sans terme source.

cf. Figure 6



En RS sans terme source, on a : $\Phi_e = \Phi_s = \Phi$

5

à travers d'une coupe quelconque

Le flux thermique est partout le même le long du système.

On peut démontrer que Φ est proportionnel à $T_1 - T_2$.

$$\exists G_{th} \in \mathbb{R}, \Phi = G_{th} (T_1 - T_2)$$

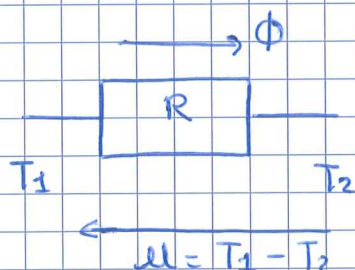
$$\uparrow_{th} \\ [W \cdot K^{-1}]$$

G_{th} est la conductance thermique de l'objet

$$T_1 - T_2 = R_{th} \Phi$$

$$\text{avec } R_{th} = \frac{1}{G_{th}}$$

R_{th} en $[K \cdot W^{-1}]$ la résistance thermique



Δ convention récepteur

analogie électrique :

$$U = V_1 - V_2 \\ I$$

$$\rightarrow U = T_1 - T_2 \\ \rightarrow \Phi$$

2. Exemples à connaître

par ♥ * mur cf. Figure 7 idem II.2.

$$S_j(x) = \Phi \quad \text{est (à redémontrer)}$$

$$j(x) = \frac{\Phi}{S}$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{-j}{\lambda} = \frac{-\Phi}{\lambda S}$$

$$dT = -\frac{\Phi}{\lambda S} dx$$

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = \int_0^L \frac{-\Phi}{\lambda S} dx$$

$$T_2 - T_1 = \frac{-\Phi}{\lambda S} L$$

par ♥

$$T_1 - T_2 = \frac{L}{\lambda S} \Phi$$

on identifie

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda S}, \quad G_{th} = \frac{\lambda S}{L}$$



éviter
se perdre
pas besoin
d'avoir le
résultat
par

* manchon cylindrique cf. Figure 8 idem II.3

$\Phi = 2\pi r h j$ est cst (à redémontrer)

$$j = \frac{\Phi}{2\pi r h} \quad \frac{dT}{dr} = \frac{-j}{\lambda} = \frac{-\Phi}{2\pi \lambda h r}$$

$$dT = \frac{-\Phi}{2\pi \lambda h} \cdot \frac{1}{r} dr$$

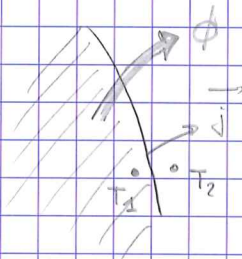
$$\int_{T_1}^{T_2} dT = \int_{R_1}^{R_2} \frac{-\Phi}{2\pi \lambda h} \frac{1}{r} dr$$

$$T_2 - T_1 = \frac{-\Phi}{2\pi \lambda h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{2\pi \lambda h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi \lambda h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

* loi de Newton pas par HP mais peut dépanner



$$\vec{j} = h(T_1 - T_2) \vec{n}_{se}$$

$$\Phi = h(T_1 - T_2) S$$

on identifie $G_{th} = hS$

3. lois de Kirchhoff et lois d'associations

différence de

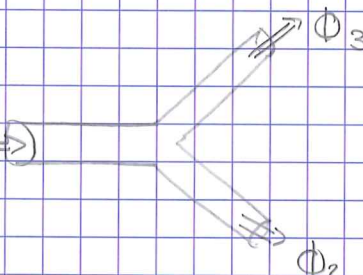
Pour les températures la loi des mailles s'applique.

Pour les flux thermiques la loi des nœuds s'applique.

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

↳ Conséquence de la conservation $\Phi_1 \Rightarrow$

du flux thermique en RS.



Les lois d'association en série et en parallèle s'appliquent.

4. Exemples d'application

Les différentes couches d'un même mur sont en série.

Les différents murs d'une maison sont en parallèle.

* Double-vitrage cf. Figure 9

$$R_{th} = R_v + R_a + R_v$$

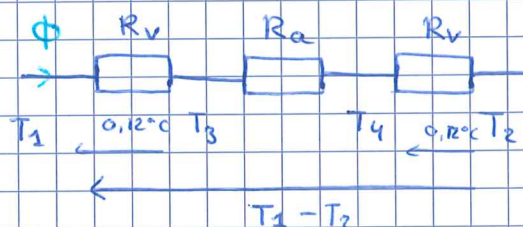
$$= \frac{e/6}{\lambda_v S} + \frac{2e/3}{\lambda_a S} + \frac{e/6}{\lambda_v S}$$

$$= \frac{e}{3S} \left(\frac{2}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_v} \right) = 0,65 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \text{ pour } S = 1 \text{ m}^2$$

imaginons vitre = 24 mm de verre: $R_{th, \text{vitre}} = \frac{e}{\lambda_v S} = 0,024 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$

On tire partie du fait que λ_a est petit.

Cherchons T_3 et T_4 :



$$T_4 - T_2 = \frac{R_v}{R_{th}} (T_1 - T_2)$$

$$T_4 = T_2 + \frac{R_v}{R_{th}} (T_1 - T_2) = 0,12 \text{ °C}$$

$$T_3 = 19,88 \text{ °C}$$

Portes au travers de la vitre :

$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} \quad [\text{J} \cdot \text{s}^{-1}]$$

$$Q = \phi \Delta t$$

5. Tableau d'analogie détaillé avec l'électricité

cf. Tableau



IV - Etude de régimes non stationnaires

1. Bilan thermique et équation de la chaleur à une dimension

cf. Figure 10 $T(x, t)$, $\vec{j} = j(x, t) \vec{u}_x$

Pendant dt , le système reçoit :

$$\begin{aligned}\delta Q &= j(x, t) S dt - j(x+dx, t) S dt \\ &= S dt [j(x, t) - j(x+dx, t)]\end{aligned}$$

* il reçoit aussi : $\delta W = \underbrace{p(x, t)}_{\substack{\text{puissance volumique} \\ \text{W} \cdot \text{m}^{-3}}} S dx dt$

→ l'énergie interne varie : $dU = U(t+dt) - U(t)$

$$= "CdT" \quad \text{capacité thermique massique}$$

$$= dm c (T(x, t+dt) - T(x, t))$$

$$= \rho S dx c (T(x, t+dt) - T(x, t))$$

1^{er} principe : $dU = \delta Q + \delta W$

$$\rho S dx c [T(x, t+dt) - T(x, t)] = S dt [j(x, t) - j(x+dx, t)] + p S dx dt$$

$$\rho c \left[\frac{T(x, t+dt) - T(x, t)}{dt} \right] = \frac{j(x, t) - j(x+dx, t)}{dx} + p$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} + p$$

$$\frac{\partial j}{\partial x} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = p$$

expression locale du bilan d'énergie 1d

+ source d'énergie

Fourier : $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{p}{\lambda}$$

équation de la chaleur

à 1d avec terme source

2. Généralisation à trois dimensions

$$T(x, y, z, t) \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} j_x(x, y, z, t) \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

par un infinitésimal:

$$\begin{aligned} \bullet \delta Q &= -\operatorname{div} \vec{j} d\tau dt & \bullet \delta W &= p d\tau dt \\ \bullet dU &= \rho c d\tau (T(\tau, t+dt) - T(\tau, t)) \end{aligned}$$

1^{er} principe: $dU = \delta Q + \delta W$

$$\rho c d\tau (T(\tau, t+dt) - T(\tau, t)) = -\operatorname{div} \vec{j} d\tau dt + p d\tau dt$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j} + p$$

$$\operatorname{div} \vec{j} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = p \quad \text{expression locale du bilan 3d}$$

$$\text{Fourier: } \vec{j} = -\lambda \operatorname{grad} T$$

$$\Delta T - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{p}{\lambda}$$

équation de la chaleur dans

le cas général (3d, terme source, régime non stationnaire)

En cylindrique ou sphérique, utiliser un formulaire

A défaut de formulaire, on établit l'équation par un bilan sur un système infinitésimal

Exemple: cf Figure 3 Cas cylindrique

$$T(r, t) \quad \vec{j} = j(r, t) \vec{e}_r$$

système: espace entre r et $r+dr$

$$\begin{aligned} \bullet \delta Q &= j(r, t) \times 2\pi r h dt - j(r+dr, t) \times 2\pi (r+dr) h dt \\ &= -2\pi h dt [(r+dr)j(r+dr, t) - rj(r, t)] \end{aligned}$$

• pas de travail.

$$dU = e \cdot 2\pi r h dr \cdot c (T(r, t+dt) - T(r, t))$$

1^{er} principe :

$$e c r dr (T(r, t+dt) - T(r, t)) = -dt [(r+dr)j(r+dr, t) - rj(r, t)]$$

$\times \frac{1}{r dr dt}$

$$e c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{(r+dr)j(r+dr, t) - rj(r, t)}{dr}$$

$$= - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rj(r, t))$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rj) + e c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{div } \vec{j}}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{e c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\Delta T}$$

3. Exemple : choc thermique

cf. Figure 11 $T = T(z, t)$, $z \in [0, \infty[$

CB: $\forall t > 0$, $T(0, t) = T_1$

CI: $\forall z \geq 0$, $T(z, 0) = T_0$

T est solution de $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{e c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

Posons $D = \frac{\lambda}{e c}$ la diffusivité thermique [$m^2 \cdot s^{-1}$]

