

Changement de référentiel en mécanique

1.

I - Aspect cinématique

1. Mouvement et référentiel

Le mouvement est un concept relatif lié au choix d'un référentiel $\mathcal{R}$.

$$\mathcal{R} = (O, \underbrace{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z}_{\text{orthonormé}}) \text{ et un chronomètre : } t$$

Les vecteurs unitaires sont vus fixes :

$$\left. \frac{d\vec{u}_x}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{0} \quad \left. \frac{d\vec{u}_y}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{0} \quad \left. \frac{d\vec{u}_z}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$$

(question de pav)

En mécanique Galiléenne ou Newtonienne, t ne dépend pas du référentiel (à un décalage près)

2. Transformation de Galilée

Principe de Galilée (pour l'aspect historique)

Quand deux référentiels sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, les lois de la physique s'y expriment de manière identique.

✧ petit hommage ✧

✧ à Galilée ✧

(1564 - 1642)

↳ sans qui P. Dourys serait au chômage ...

a) Translation

$$\mathcal{R} (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$$

$$\mathcal{R}' (O', \vec{u}_x', \vec{u}_y', \vec{u}_z')$$

$\mathcal{R}'$ est en translation dans $\mathcal{R}$ si $\vec{u}_x', \vec{u}_y', \vec{u}_z'$ sont constants dans $\mathcal{R}$.

À un changement de base près, on peut prendre :

Les deux systèmes d'axes demeurent parallèles.

$$\vec{u}_x' = \vec{u}_x$$

$$\vec{u}_y' = \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_z' = \vec{u}_z$$

cf. Figure 6 avec un exemple et un contre exemple.

b) Mouvement colinéaire à un axe de coordonnées

cf. Figure 1

Π un point matériel

$R; \Pi(x, y, z)$

$R'; \Pi(x', y', z')$

$$\vec{v}(O'/R) = \left. \frac{d\vec{OO'}}{dt} \right|_R = \vec{v}_e \quad \text{la vitesse d'entraînement}$$

Pour une translation rectiligne uniforme (TRU) $\vec{v}_e$ est un vecteur constant.

Ici, on prend $\vec{v}_e = v_e \vec{u}_x$ donc $\vec{OO'} = \vec{v}_e t = v_e t \vec{u}_x$

$$\begin{cases} z' = z \\ y' = y \end{cases} \quad \text{mais } x = \overline{OH} \\ \quad \quad \quad = \overline{OO'} + \overline{O'H} \\ \quad \quad \quad = v_e t + x'$$

$$\begin{cases} x' = x - v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Transformation} \\ \text{de Galilée} \end{array}$$

c) Mouvement dans une direction quelconque

cf. Figure 2

$\vec{v}_e$ est est $\vec{v}_e = \begin{pmatrix} v_{ex} \\ v_{ey} \\ v_{ez} \end{pmatrix}$

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$$

$$\begin{aligned} x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z &= v_{ex} t \vec{u}_x + v_{ey} t \vec{u}_y + v_{ez} t \vec{u}_z \\ &+ x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'} + z' \vec{u}_{z'} \end{aligned}$$

$$\text{or } \begin{pmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \\ \vec{u}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_{x'} \\ \vec{u}_{y'} \\ \vec{u}_{z'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = v_{ex} t + x' \\ y = v_{ey} t + y' \\ z = v_{ez} t + z' \end{cases}$$

$$(G) \quad \begin{cases} x' = x - v_{ex} t \\ y' = y - v_{ey} t \\ z' = z - v_{ez} t \end{cases}$$

Transformation de
Galilée

d) Composition des vitesses

dans $\mathcal{R}$,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{on}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z) \Big|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z \end{aligned}$$

dans $\mathcal{R}'$,

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= \dot{x}' \vec{u}_x' + \dot{y}' \vec{u}_y' + \dot{z}' \vec{u}_z' \\ &= \dot{x}' \vec{u}_x + \dot{y}' \vec{u}_y + \dot{z}' \vec{u}_z \end{aligned}$$

En utilisant les relations (G) on obtient:

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= (\dot{x} - v_{ex}) \vec{u}_x + (\dot{y} - v_{ey}) \vec{u}_y + (\dot{z} - v_{ez}) \vec{u}_z \\ &= \vec{v} - \vec{v}_e \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$$

vitesses
du m^e pt M
dans 2 réf.

Loi de composition
des vitesses

e) Exemples

cf. Figure 3

* $\mathcal{R}$: terrestre

$\mathcal{R}'$: wagon

$v_e = 20 \text{ km/h}$

$v' = 10 \text{ km/h}$

$$v = v' + v_e = 10 + 20 = 30 \text{ km/h}$$

* si $v' = -10 \text{ km/h}$

$$v = -10 + 20 = 10 \text{ km/h}$$

cf. Figure 4

$$v_1 = 20 \text{ km/h}$$

$$v_0 = 100 \text{ km/h}$$

trouver v_2 après rebond

Rebond supposé élastique (parfait): sur un support fixe la vitesse change de sens en conservant sa norme

R : terrestre

R' : wagon

avant le choc: $\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_e$ vitesse du nouveau sol par rapport à l'ancien
 $= v_1 \vec{u}_x - v_0 (-\vec{u}_x)$ vitesse du train
 $= (v_1 + v_0) \vec{u}_x$

$$v_1' = v_1 + v_0 = 120 \text{ km/h}$$

après le rebond: $\vec{v}_2' = -\vec{v}_1' = -(v_1 + v_0) \vec{u}_x$

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= \vec{v}_2' + \vec{v}_e \\ &= -(v_1 + v_0) \vec{u}_x - v_0 \vec{u}_x \\ &= -(v_1 + 2v_0) \vec{u}_x \end{aligned}$$

$$v_2 = v_1 + 2v_0 = 220 \text{ km/h}$$

Le travail des forces de contact est nul dans le référentiel du wagon mais positif dans le ref terrestre.

f) Invariance galiléenne de la seconde loi de Newton

cf c) (1)

$$\ddot{x}' \vec{u}_x + \ddot{y}' \vec{u}_y + \ddot{z}' \vec{u}_z = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z - \vec{v}_e$$

$$\ddot{x}' \vec{u}_x + \ddot{y}' \vec{u}_y + \ddot{z}' \vec{u}_z = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z + \vec{0}$$

$$-\vec{a}' = \vec{a}$$

$$\begin{matrix} R \\ m\vec{a} = \sum \vec{F} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} R' \\ m\vec{a}' = \sum \vec{F}' \end{matrix}$$

Or $\vec{a} = \vec{a}'$

donc $\sum \vec{F} = \sum \vec{F}'$

les deux pou conduisent à écrire les mêmes équations

→ c'est le principe de Galilée!

3. Cas de deux référentiels en translation l'un par rapport à l'autre.

a) Situation et vocabulaire cf. Figure 5

translation : cf 2.a

le mouvement de O' dans R est quelconque

$\vec{v}_e = \vec{v}(O'/R)$ est quelconque.

cf. Figure 6 : on voit une translation sur un cercle.

b) Composition des vitesses

$$\vec{OM} = \sum x_i \vec{u}_i \quad \begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{matrix}$$

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$$

$$\sum x_i \vec{u}_i = \vec{OO'} + \sum x_i' \vec{u}_i$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum x_i \vec{u}_i \right) = \vec{v}(O'/R) + \sum x_i' \frac{d\vec{u}_i}{dt}$$

donc $\vec{u}_i$
fixes

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$$

idem à 2)

↑
vitesse de M
dans R

↑
vitesse de M
dans R'

c) Composition des accélérations

$$\sum x_i \vec{u}_i = \vec{v}(O'/R) + \sum x_i' \vec{u}_i$$

$\frac{d}{dt}\Big|_R$

$$\sum x_i \vec{u}_i = \vec{a}(O'/R) + \sum x_i' \vec{u}_i$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e$$

avec $\vec{a}_e = \vec{a}(O'/R)$: accélération de la nouvelle origine par rapport à l'ancien $\vec{a}_e$.

On retrouve un effet d'entraînement comme pour la vitesse.

4. Cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe.

cf. Figure 7

$$R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$$

$$R'(O'=O, \vec{u}_x', \vec{u}_y', \vec{u}_z') \quad \text{et} \quad \vec{u}_z' = \vec{u}_z$$

$$\theta = (\vec{u}_x, \vec{u}_x') = (\vec{u}_y, \vec{u}_y') = \omega t \quad \omega \text{ constante}$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

pour mieux visualiser : cf. Figure 8 : le manège : R : terrestre

R' : lié aux chevaux

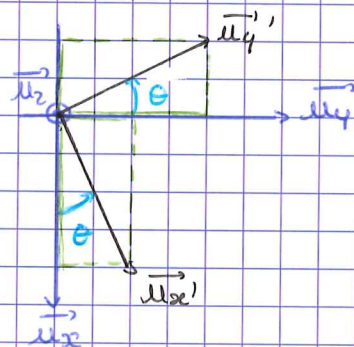
a) Vecteur rotation

$$\left. \frac{d\vec{u}_x'}{dt} \right|_R \neq \vec{0} \quad \left. \frac{d\vec{u}_y'}{dt} \right|_R \neq \vec{0}$$

$$\vec{u}_x' = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_y' = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y$$

$$\left. \frac{d\vec{u}_x'}{dt} \right|_R = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_y$$



$$\left. \frac{d\vec{u}_y'}{dt} \right|_R = -\dot{\Theta} \cos \Theta \vec{u}_x - \dot{\Theta} \sin \Theta \vec{u}_y$$

4.

Soit $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ "vecteur rotation"

On remarque que :

$$\left. \frac{d\vec{u}_x'}{dt} \right|_R = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_x'$$

$$\left. \frac{d\vec{u}_y'}{dt} \right|_R = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_y'$$

et aussi :

$$\left. \frac{d\vec{u}_z'}{dt} \right|_R = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_z'$$

$$\forall \vec{u}_i', \quad \left. \frac{d\vec{u}_i'}{dt} \right|_R = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_i' \quad \text{vecteur rotation}$$

bonus: $\forall \vec{A}'$ fixe dans R' , on a : $\left. \frac{d\vec{A}'}{dt} \right|_R = \vec{\omega} \wedge \vec{A}'$

b) Composition des vitesses

Π un point matériel

$$\vec{v} = \left. \frac{d\vec{O\Pi}}{dt} \right|_R = \sum x_i \vec{u}_i$$

$$\vec{v}' = \left. \frac{d\vec{O\Pi}}{dt} \right|_{R'} = \sum x_i' \vec{u}_i'$$

} à relier

Pour relier $\vec{v}$ à $\vec{v}'$, on exprime le vecteur $\vec{O\Pi}$ dans R' puis on le dérive dans R .

$$\vec{O\Pi} = \vec{O\Pi} = \sum x_i' \vec{u}_i'$$

$\left. \frac{d}{dt} \right|_R$

$$\vec{v} = \left. \sum \left(x_i' \vec{u}_i' + x_i' \frac{d\vec{u}_i'}{dt} \right) \right|_R$$

Δ ne pas oublier de dériver $\vec{u}_i'$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}' + \sum x_i' \vec{\omega} \wedge \vec{u}_i' \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \sum x_i' \vec{u}_i'\end{aligned}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e \quad \text{avec} \quad \vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$$

Δ ici $\vec{v}_e$ dépend de Π

c) Composition des accélérations

$$(*) \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \sum x_i' \vec{u}_i' \quad \text{avec} \quad \vec{v}' = \sum \dot{x}_i' \vec{u}_i'$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \left(\begin{aligned} \vec{v} &= \sum \dot{x}_i' \vec{u}_i' + \vec{\omega} \wedge \sum x_i' \vec{u}_i' \\ \vec{a} &= \sum (\ddot{x}_i' \vec{u}_i' + \dot{x}_i' \vec{\omega} \wedge \vec{u}_i') + \vec{\omega} \wedge \sum (\dot{x}_i' \vec{u}_i' + x_i' \vec{\omega} \wedge \vec{u}_i') \end{aligned} \right)$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \wedge \sum \dot{x}_i' \vec{u}_i' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \sum x_i' \vec{u}_i')$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP})$$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) \quad \text{accélération d'entraînement}$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' \quad \text{accélération de Coriolis}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

Rq: Coriolis était élève à painsa ≈ 1800 ppah

d) Point coïncident

Pour un point immobile dans $\mathcal{R}'$ on a $\vec{a}' = \vec{0}$ et $\vec{v}' = \vec{0}$
donc $\vec{a}_c = \vec{0}$, il reste $\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_e \\ \vec{a} = \vec{a}_e \end{cases}$ d'où l'effet d'entraînement.

On remarque que dans le cas où Π se déplace dans $\mathcal{R}'$, $\vec{v}_e$ et $\vec{a}_e$ sont identiques à celles du point fixe dans $\mathcal{R}'$ qui coïncide avec Π à l'instant t . Ce sont donc les vitesse et accélération dans $\mathcal{R}$

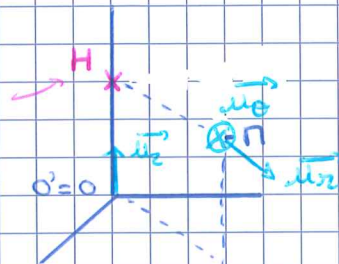
de ce point fixe coïncident.

5

IMPORTANT e.) Expressions simplifiées de $\vec{v}_e$ et $\vec{a}_e$

$$\begin{aligned}\vec{v}_e &= \vec{\omega} \wedge \vec{OP} \\ &= \omega \vec{u}_z \wedge (\vec{OH} + \vec{HP}) \\ &= \vec{0} + \omega \vec{u}_z \wedge \vec{HP} \vec{u}_z \\ &= \omega \vec{HP} \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

projeté ortho
de $\vec{P}$ sur z



$$\vec{v}_e = \pi \omega \vec{u}_\theta$$

Evidemment, le point coïncident tourne sur un cercle de rayon π à la vitesse ω .

$$\begin{aligned}\vec{a}_e &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) \\ &= \omega \vec{u}_z \wedge \pi \omega \vec{u}_\theta \\ &= -\pi \omega^2 \vec{u}_r\end{aligned}$$

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \vec{HP} \quad \text{avec } H \text{ proj. ortho de } P \text{ sur l'axe de rotation}$$

Evidemment, le point coïncident tourne sur un cercle (accélération centripète).

5. Cas général (HP)

Si R' a un mouvement quelconque par rapport à R on a :

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e \\ \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c \end{cases} \quad \text{avec } \vec{a}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

$\vec{v}_e$ et $\vec{a}_e$ se retrouvent par l'astuce du pt coïncident

II - Dynamique en référentiel non galiléen

1. Problématique

* 2^{ème} loi de Newton: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$

s'applique dans un référentiel galiléen

* 1^{ère} loi de Newton:

Dans un réf. galiléen, un pt maté. a un mouvement rectiligne uniforme.

* Soit R galiléen.

Soit R' en TRU dans R .

Alors R' est lui aussi galiléen.

La loi de Newton s'applique dans R' comme dans R .

* Parfois, on a très envie d'utiliser un réf. non-galiléen (pas en TRU dans R galiléen)

exemple: cf. Figure 9

plus en TRU par rapport à R

Si le bus freine brutalement, R' n'est plus galiléen et pourtant on aimerait étudier le mouvement de la valise dans R' .

2. Cas où R' est en translation dans R galiléen

cf. Figure 10

a) Force d'inertie d'entraînement sur un pt matériel

dans R : $m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$

Or $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e$

$$m(\vec{a}' + \vec{a}_e) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

6.

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}_{\text{ext}} - m\vec{a}_e$$

force d'inertie d'entrainement:

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\vec{a}'(O'/R)$$

Pour étudier le mouvement dans R' on ajoute aux forces galiléennes cette force d'inertie.

b) Cas d'un système étendu, point d'application de $\vec{F}_{ie}$

Dans le cas de la translation, les forces d'inertie sur un objet étendu sont réparties proportionnellement aux masses (comme la pesanteur), on peut les remplacer par une force unique s'appliquant au centre de masse G .

c) Exemples

ex 1: le bus cf. Figure 8

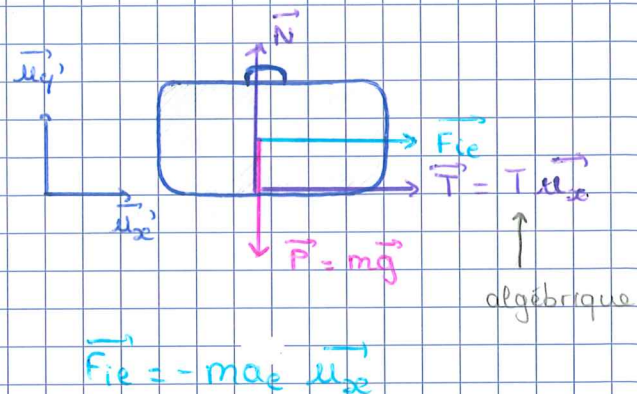
$$\vec{a}_e = \vec{a}'(O'/R) = a_e \vec{u}_x$$

on choisit $a_e = \text{cst}$ et $a_e < 0$

Quel est le mouvement de la valise après le début du freinage?

La valise qui se déplaçait par rapport à la route a tendance à perdre dans ce mouvement.

Par rapport au bus qui freine, elle se sent poussée vers l'avant.



Révision loi de Coulomb:

* 1^{er} cas: à partir d'une situation sans glissement, cet état perdure tant que: $|\vec{T}| \leq \mu_s N$

dès que cette inégalité est violée, le glissement commence

* 2^{ème} cas : Quand il y a glissement :

$$\begin{cases} |\vec{T}| = \mu_d N \\ \vec{T} \text{ de sens opposé au glissement} \end{cases}$$

μ_s : coef statique μ_d : coef dynamique

retour à l'ex :

Au départ, non glissement. Dans ce cas, $\vec{v}' = \vec{0}$

Equilibre relatif :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 0 = T - m a_e \\ 0 = N - mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m a_e \\ N = mg \end{cases}$$

Le non glissement perdure tant que : $|m a_e| \leq \mu mg$
 $|a_e| \leq \mu g$

Si $|a_e| > \mu g$, la valise glisse à $t=0^+$,
sinon elle ne bouge pas.

* Pour $|a_e| > \mu g$,

la valise glisse vers l'avant.

intuition au sens opposé à $\vec{T}$

$$\begin{cases} m \ddot{x}' = T - m a_e \\ m \ddot{y}' = N - mg \end{cases} \quad \text{or } \ddot{y}' = 0 \text{ donc } N = mg$$

Coulomb : $T = -\mu N = -\mu mg$

$$m \ddot{x}' = -\mu mg - a_e m$$

$$\ddot{x}' = -\mu g - a_e$$

$$x' = \underbrace{-(a_e + \mu g)}_{> 0} \frac{t^2}{2} + 0 + 0$$

On pourrait étudier le basculement autour de I
par le théorème du moment cinétique.

ex 2: Tour d'apesanteur cf. Figure 11

Cabine en chute libre

$$\vec{a}(O'/R) = \vec{g}$$

$$\vec{a}_e = \vec{g}$$

Dans R' , un point de masse m est soumis à :

$$\bullet \vec{P} = m\vec{g}$$

$$\bullet \vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\vec{g}$$

• $\vec{F}_{autres}$

$$\Sigma \vec{F} = \underbrace{m\vec{g} - m\vec{g}}_{\vec{0}} + \vec{F}_{autres}$$

Dans R' l'effet de gravité est compensé.

ex 3: vol parabolique

$$\text{Le pilote assure } \vec{a}(O'/R) = \vec{g} \quad \vec{a}_e = \vec{g}$$

A nouveau $\vec{F}_{ie}$ compense $\vec{P}$.

3. Cas où R' est en rotation uniforme dans R galiléen

a) Forces d'inertie

cf. Figure 8

$R(0, x, y, z)$ galiléen.

$R'(0, x', y', z')$ en rotation non galiléen

PFD dans R :

$$m\vec{a} = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

$$\text{Or } \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$m(\vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c) = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

$$m\vec{a}' = \Sigma \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e \\ \vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c \end{cases}$$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) = -\omega^2 \vec{HP}$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{ie} = m\omega^2 \vec{HP} \\ \vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} \end{cases}$$

$\vec{F}_{ie}$ est centrifuge, elle pousse les objets loin du centre.

Comme une force magnétique, $\vec{F}_{ic}$ est perpendiculaire à la vitesse et ne travaille pas.

b) Exemples

* Gravité artificielle cf. Figure 14

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ie} &= m\omega^2 \vec{HP} \\ &= m\omega^2 R \vec{u}_r \end{aligned}$$

(comme un grand vaisseau spatial dans les films de SF)

On reproduit la gravité terrestre si $R\omega^2 = g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

$$R = 10 \text{ km} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = 18 \text{ tr/h}$$

* exo : cf. Figure 13

d'anneau glisse sans frottement sur la tige : étudier en mouvement :

On raisonne dans R'

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ie}' &= m\omega^2 \vec{HP}' \\ &= m\omega^2 \vec{OP}' \\ &= m\omega^2 \vec{e}'_1 \vec{u}_x' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ic}' &= -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}' \\ &= -2m\omega \vec{u}_z \wedge \vec{e}'_1 \vec{u}_x' \\ &= -2m\omega \vec{e}'_1 \vec{u}_y' \end{aligned}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = m\omega^2 x' \\ m \times 0 = R_y - 2m\omega \dot{x}' \\ m \times 0 = -mg + R_z \end{cases}$$

$$\ddot{x}' - \omega^2 x' = 0$$

$$x' = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

$$\text{CI } \begin{cases} x_0 = A + B \\ 0 = \omega A - \omega B \end{cases} \rightarrow \text{on a dérivé et évalué en } t=0$$

$$A = B = \frac{x_0}{2}$$

$$x' = \frac{x_0}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t})$$

$$x' = x_0 \cosh(\omega t)$$

$$R_y' = 2m\omega \dot{x}' = 2m\omega x_0 \omega \sinh(\omega t)$$

$$R_y' = 2m\omega^2 x_0 \sinh(\omega t)$$

Bonus: vitesse au bout de la tige ($x' = l$)?

$$x' = l \Leftrightarrow x_0 \cosh(\omega t_1) = l$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{argch}\left(\frac{l}{x_0}\right)$$

$\rightarrow$ réciproque de $\cosh$
sur $(0, +\infty[$

$$\dot{x}'(t_1) = \omega x_0 \sinh(\omega t_1)$$

$$= \omega x_0 \sinh\left(\operatorname{argch}\left(\frac{l}{x_0}\right)\right)$$

berk!

autre méthode: $\cosh^2 - \sinh^2 = 1 \Rightarrow \sinh = \sqrt{\cosh^2 - 1}$

$$\dot{x}'_1 = \omega x_0 \sqrt{\left(\frac{l}{x_0}\right)^2 - 1}$$

variante : méthode énergétique

$\vec{F}_{ie}$ dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{pe}$

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ie} &= m\omega^2 H\vec{r} = m\omega^2 r \vec{u}_r \\ &= -\vec{\text{grad}} \left(-m\omega^2 \frac{r^2}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_{pe} = -m\omega^2 \frac{r^2}{2}$$

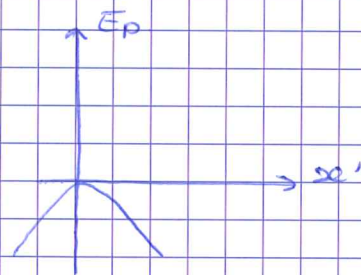
$$\text{ou : } \delta W = \vec{F}_{ie} \cdot d\vec{ON}$$

$$d\vec{ON} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

$$\delta W = m\omega^2 r dr$$

$$-d\mathcal{E}_{pe} = -\delta W = -m\omega^2 r dr$$

$$\mathcal{E}_{pe} = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2$$



Dans l'exercice, le poids, la réaction et $\vec{F}_{ie}$ ne travaillent pas, le système est conservatif :

$$\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \text{cte}$$

$$\frac{1}{2} m \dot{x}'^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x'^2 = -\frac{1}{2} m\omega^2 x_0'^2$$

à l'instant initial

$$\dot{x}' = \sqrt{\omega^2 (x_0'^2 - x'^2)}$$

Pour $x' = l$:

$$\dot{x}' = \sqrt{\omega^2 (l^2 - x_0'^2)}$$