

Cinématique des fluides

1

I - Description d'un fluide en mouvement

1. Particule fluide

Les molécules d'un fluide se déplacent librement et on ne peut pas toutes les étudier. On les regroupe par petits paquets de diamètre e . Ces paquets sont les particules fluides.

$$l \ll e \ll L$$

libre parcours moyen

échelle de l'écoulement

échelle :

microscopique

mésoscopique
 $\approx 1 \mu\text{m}$

macroscopique

- $e \ll L$: du pou mécanique c'est un pr matériel
- $e \gg l$: on peut définir des variables thermodynamiques qui sont des moyennes (ex: $P, T, \dots$)

2. Champs eulériens dans l'écoulement

soit R .

Π un pt de l'espace

A t , en Π , il y a une particule fluide.

Elle a $\vec{v}, P, T, \dots$

Remarque:

On les affecte à Π : $\vec{v}(\Pi, t), P(\Pi, t), \dots : F(\Pi, t) = F(x, y, z, t)$

Définition d'un champ eulérien dans un écoulement:

cf. poly.

3. Visualisation du champ de vitesse

On utilise des traçours dont on peut voir le mouvement.

ex (bulles, fumées, ...)

cf. Figure 1

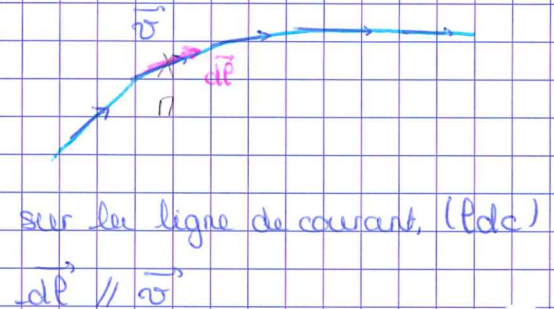
Soit P une particule qu'on suit :

$$\frac{d\vec{OP}}{dt}(t) = \vec{v}(P(t), t)$$

champ extérieur de vitesse

Connaissant le champ $\vec{v}$, on peut le représenter par des flèches ou tracer des lignes de courant (= ligne de champ de $\vec{v}$ à t donné).

Si l'écoulement se modifie dans le temps, les ldc ne sont pas les trajectoires des particules.



4. Écoulement stationnaire

Dans un écoulement stationnaire, les champs extérieurs ne dépendent pas du temps :

$$\vec{v}(\Pi, t) = \vec{v}(\Pi)$$

$$p(\Pi, t) = p(\Pi)$$

les ldc sont fixes, confondues avec les trajectoires des particules.

Cependant comme les particules se déplacent les grandeurs qu'elles voient se modifient (ou peuvent se modifier) au cours de leur déplacement.

5. Dérivée particulaire

Soit $P(t)$ le point où se trouve une particule

$$\text{Notons } F_p(t) = F(P(t), t)$$

La grandeur F que connaît la particule à l'instant t est le champ extérieur évalué à l'instant t au point où se trouve la particule.

a) Règle de la chaîne

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x, y, z, \dots \mapsto f(x, y, z, \dots)$$

* différentielle de f :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots$$

On appelle :

$$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto x(t)$$

$$t \mapsto y(t)$$

$$t \mapsto z(t)$$

Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto f(x(t), y(t), z(t), \dots)$$

règle de la chaîne :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \dots$$

← cum vectum - avec mouvement

b) Dérivée convective ou particulaire

Définition de la dérivée particulaire

cf poly.

On appelle dérivée convective de F , la dérivée de F telle qu'une particule entraînée par l'écoulement la voit varier

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{dF_p(t)}{dt}$$

$$\text{Or } F_p(t) = F(P(t), t)$$

$$= F(x_p(t), y_p(t), z_p(t), t)$$

$$\text{Donc } \frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dt}{dt}$$

$$\vec{\text{grad}} F \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} \frac{dx_p}{dt} \\ \frac{dy_p}{dt} \\ \frac{dz_p}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\frac{DF(\Pi, t)}{Dt} = \frac{\partial F(\Pi, t)}{\partial t} + \vec{v}(\Pi, t) \cdot \vec{\text{grad}} F(\Pi, t)$$

a) Signification de chaque terme

* sur place :

en Π donné, fixe : F varie $\Rightarrow$ terme $\frac{\partial F}{\partial t}$

* dans un écoulement stationnaire : $F(\Pi, t) = F(\Pi)$

entre Π et $\Pi + d\vec{O\Pi}$, F varie



$$F(\Pi') - F(\Pi) = dF = \vec{\text{grad}} F \cdot d\vec{O\Pi}$$

$\rightarrow$ représente les variations spatiales du champ F

$$\text{si } d\vec{O\Pi} = \vec{v} dt$$

$$dF = \vec{\text{grad}} F \cdot \vec{v} dt$$

$$\frac{dF}{dt} = \vec{\text{grad}} F \cdot \vec{v}$$

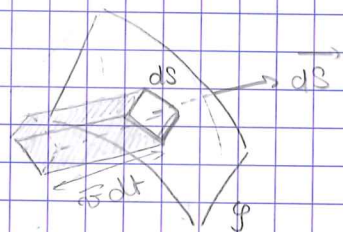
* Dans la dérivée particulaire, on a à la fois les variations sur place et les variations dues au mouvement dans un champ non uniforme.

II - Masse et volume en écoulement

1. Transport de masse, transport de volume

Pendant dt , dS est traversée par un fluide de volume

$$dV = \int_V \vec{v} \cdot d\vec{S} dt$$



$$D_v = \frac{dV}{dt} = \int_{\mathcal{P}} \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad [m^3 \cdot s^{-1}]$$

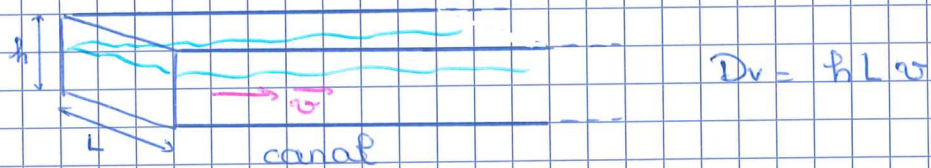
c'est le débit volumique (ou de volume) au travers de la surface $\mathcal{P}$

$$\text{le débit massique : } D_m = \frac{dm}{dt} = \int_{\mathcal{P}} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad [kg \cdot s^{-1}]$$

$$\text{on appelle } \vec{j}_m = \rho \vec{v} \quad [kg \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}]$$

$$D_m = \int_{\mathcal{P}} \vec{j}_m \cdot d\vec{S}$$

Exemple :

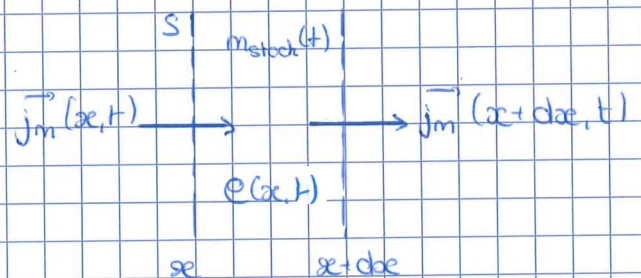


2. Conservation de la masse : aspect local

1 dimension

$$\vec{v} = v(x, t) \vec{u}_x$$

$$\rho = \rho(x, t)$$



$$* m_{stock}(t) = \rho(x, t) S dx$$

$$dm_{stock} = S dx \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dt$$

$$* dm_e = j_m(x, t) S dt - j_m(x+dx, t) S dt$$

$$= -S dt \frac{\partial j_m}{\partial x} dx$$

$$* \text{bilan : } dm_{stock} = dm_e$$

$$S dx \frac{\partial \rho}{\partial t} dt = -S dt \frac{\partial j_m}{\partial x} dx$$

$$\frac{\partial j_m}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Dans le cas général, on obtient $\text{div } \vec{j}_m + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

équation de conservation de la masse

En régime stationnaire, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

donc $\text{div } \vec{j}_m = 0$

càd $\vec{j}_m$ est à flux conservatif, le débit massique se conserve

Application 1: cf. Figure 3

• hypothèse : ρ uniforme : $\rho(t)$

→ trouver $\vec{v}$?

eq conservation
masse

$$\text{CSU : } \text{div} (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\text{or } \vec{v} = v \vec{u}_x$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\rho = \frac{\rho(0) S a_0}{S a(t)} \quad \left. \vphantom{\rho = \frac{\rho(0) S a_0}{S a(t)}} \right\} \text{masse initiale : la masse est constante}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho(0) a_0 \times \left(-\frac{\dot{a}}{a^2} \right)$$

$$\text{d'où } \rho_0 \frac{a_0}{a} \frac{\partial v}{\partial x} - \rho_0 a_0 \frac{\dot{a}}{a^2} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\text{en intégrant par rapport à } x : \quad v = \frac{\dot{a}}{a} x + k(t)$$

$$\text{CB } v(0) = 0 \quad k = 0$$

$$v = \frac{\dot{a}}{a} x$$

Hypothèse : ρ uniforme : $\rho(t)$

→ trouver $\vec{v}$?

$$\rho = \frac{\rho(t) \frac{4}{3} \pi R_0^3}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{\rho_0 R_0^3}{R^3(t)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{3 \rho_0 R_0^3 \dot{R}}{R^4}$$

$$\text{cslw : } \operatorname{div} \vec{j}_m + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\rho \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\rho_0 R_0^3}{R^3(t)} \operatorname{div} \vec{v} - \frac{3 \rho_0 R_0^3 \dot{R}}{R^4(t)} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{3 \dot{R}}{R(t)}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) = \frac{3 \dot{R}}{R}$$

r : distance $0 \leq r \leq R$ quelconque

R : rayon de la sphère

$$r^2 v = \frac{3 \dot{R}}{R} \frac{r^3}{3} + k$$

$$v = \frac{\dot{R}}{R} r$$

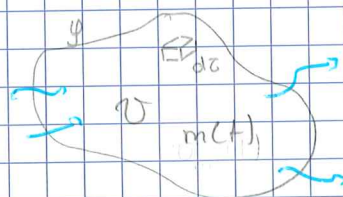
$$k(0) = 0$$

3. Conservation de la masse : aspect intégral

$$m(t) = \int_V \rho(r, t) d\tau \quad \rightarrow \text{élt de volume}$$

Pendant dt , la stock varie de dm

$$\frac{dm}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} (r, t) d\tau$$



$$\frac{dm_e}{dt} = - \oint_{\mathcal{S}} \vec{j}_m \cdot d\vec{S}$$

bilan $\frac{dm}{dt} = \frac{dm_e}{dt}$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \oint_{\mathcal{S}} \vec{j}_m \cdot d\vec{S}$$

intégrale de volume

intégrale de surface

On utilise la formule G.O. (Green et Ostrogradski) : cf. Formulaire.

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int_V \text{div } \vec{j}_m d\tau$$

Cette égalité a lieu pour tout V , on en déduit :

$$\forall n, \forall t, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \text{div } \vec{j}_m$$

$$\text{div } \vec{j}_m + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

La même idée physique s'exprime au niveau local ou au niveau intégral, le passage s'effectue grâce à G.O.

4. Dérivée particulière de la masse volumique

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \rho$$

$$= - \text{div } \vec{j}_m + \vec{v} \cdot \text{grad } \rho$$

$$= - \text{div } (\rho \vec{v}) + \vec{v} \cdot \text{grad } \rho$$

$$= - \rho \text{div } (\vec{v}) - \text{grad } \rho \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{grad } \rho$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = - \rho \text{div } \vec{v}$$

3)

cf. formulaire

Selon le signe de $\text{div } \vec{v}$, les particules fluides se dilatent ou se contractent en passant en $\mathcal{V}$ à t .

Soit V_p le volume d'une particule fluide.

5.

$$m_p = \rho V_p$$

dérivée logarithmique :

la
masse
est cste

$$\ln(m_p) = \ln(\rho) + \ln(V_p)$$

→ on appl. $\ln$

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{V_p} \frac{DV_p}{Dt}$$

→ on dérive

$$\text{donc } \text{div } \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = +\frac{1}{V_p} \frac{DV_p}{Dt}$$

5. Écoulement incompressible

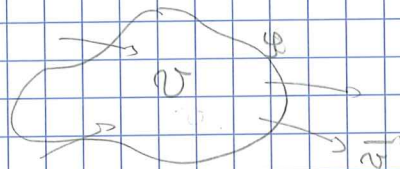
Dans un écoulement incompressible, chaque particule fluide conserve un volume constant : $\frac{DV_p}{Dt} = 0$

conséquence : $\forall \Omega, \forall t, \text{div } \vec{v}(\Omega, t) = 0$

En général, un écoulement avec $v < v_{son}$ est incompressible.

conséquence :

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \text{div } \vec{v} d\Omega = 0$$



$$\forall \Omega \text{ fermée : } \oint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$$

Dans un écoulement incompressible, le débit volumique se conserve.

⚠ saisir la nuance avec fin 2.

Parfois, on a régime stationnaire donc D_m se conserve mais $\frac{DV_p}{Dt} \neq 0$

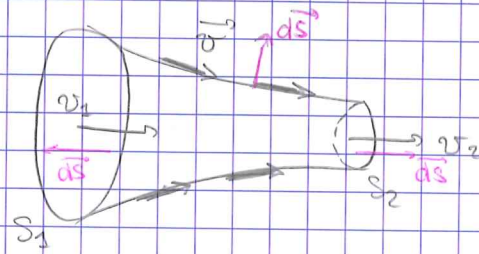
donc $D\rho$ ne se conserve pas.

ex : machine avec entrée de liquide et sortie de vapeur

Application

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

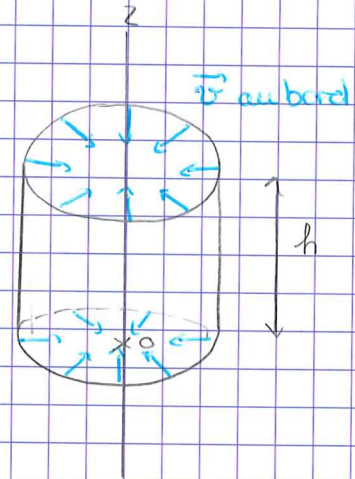
Lorsque les lignes de courant se resserrent, le fluide va de plus en plus vite.



Exercice :

On donne

$$\begin{cases} v_r = -\alpha r \\ v_\theta = 0 \\ v_z = ? \end{cases}$$



formule :

$$\frac{1}{\pi} \frac{\partial (\pi v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{\pi} (-2\alpha r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 2\alpha$$

$$v_z = 2\alpha z + k(r)$$

Si le fond est fermé : (B) : $v(0) = 0 \Rightarrow k = 0$

Rq : ldc : $d\vec{r} \parallel \vec{v}$

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

$$\begin{vmatrix} dr & -\alpha r \\ dz & 2\alpha z \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d\theta \wedge \vec{v} = 0$$

III - Vorticité

6

Vortex = tourbillon

Vorticité +/- caractère tourbillonnaire.

1. Rotationnel du champ de vitesse

$$\text{noté } \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

A connaître en cartésienne,

cylindrique / sphérique $\rightarrow$ formules

En coordonnées cartésiennes ; on appelle rotationnel de $\vec{v}$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple de rot

• pompe $\vec{v} = v_0 \frac{x}{a} \vec{u}_x$



pas de tourbillon

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_0 \frac{x}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• explosion

$$\vec{v} = \dot{R} \frac{x}{R} \vec{u}_x$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{R} \frac{x}{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

coordonnées
sphériques

pas de
tourbillon

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$$

cf. formulaire

• "vortex"

$$\vec{v} = \pi \omega \vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_r = 0 \\ v_\theta = \pi \omega \\ v_z = 0 \end{pmatrix}$$

coordonnées
cylindriques

$$\text{rot } \vec{v} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial \pi^2 \omega}{\partial \pi} \vec{u}_z = 2\omega \vec{u}_z$$

tourbillon uniforme

cf. Figure 6

• vortex de Burgers

coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} v_r = -\frac{2\nu x}{c^2} \\ v_\theta = \frac{Ac^2}{x} (1 - e^{-x^2/c^2}) \\ v_z = \frac{4\nu}{c^2} z \end{cases}$$

écoulement incompressible

→ on peut vérifier div $\vec{v} = 0$

tourbillon non uniforme

cf. Figure 7

$$\text{rot } \vec{v} = 0 \vec{u}_r + 0 \vec{u}_\theta + \frac{1}{\pi} Ac^2 \frac{2x}{c^2} e^{-x^2/c^2} \vec{u}_z$$

Rq: ν et c sont des cste

$$\text{rot } \vec{v} = 2A e^{-\frac{x^2}{c^2}} \vec{u}_z$$

2. Vecteur tourbillon

pas tjs écrit.

Fort des exemples précédents, on pose $\vec{\Omega}(\pi) = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}(\pi)$

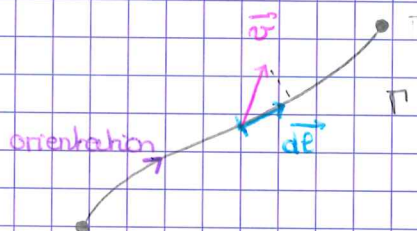
Il mesure localement la présence
de tourbillon.

vecteur tourbillon
ou vecteur vorticité

Concept qui dépend du ref

3. Circulation du champ de vitesse

Définition: cf. poly

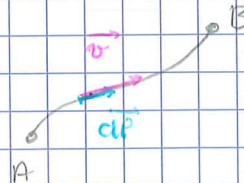


Cas particuliers

- Si Γ est une ligne de courant

$$\vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \pm v d\ell$$

selon le sens

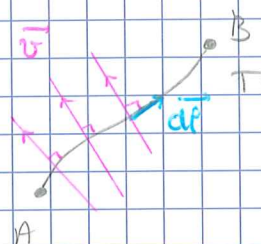


Si en plus $v = \text{cste}$ $\mathcal{C} = \int \pm v d\ell = \pm v \ell$

- Si Γ est $\perp$ aux lignes de courant

$$\vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\mathcal{C} = 0$$



$\mathcal{C}$ mesure la manière dont la courbe longe les ldc ou la manière dont les particules circulent le long de la courbe.

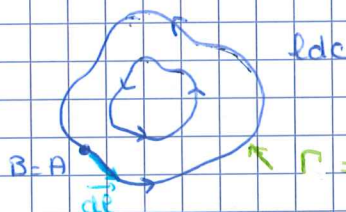
4. Cas d'une courbe fermée et lien avec la vorticité

Proposition cf. poly

↳ définition d'un écoulement tourbillonnaire

Explication :

$$\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \oint v d\ell > 0$$



$\Gamma =$ cette ligne de courant

(Sur les exemples de 1) tracer 1 courbe)

Le lien entre circulation et vorticité se fait par la formule de Stokes.

$$\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Sigma} \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Si : $\forall \Omega, \text{rot } \vec{v}(\Omega) = \vec{0}$ Alors : $\forall \Gamma$ fermée, $\mathcal{C} = 0$

→ écoulement tourbillonnaire
non

Exemple :

• cf. Figure 6

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} &= \int_C \omega \cdot \vec{u}_\theta \cdot dl \cdot \vec{u}_\theta \\ C: \text{cercle} \\ &= \omega \int_C dl \\ &= \omega \times 2\pi r\end{aligned}$$

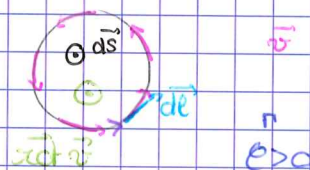
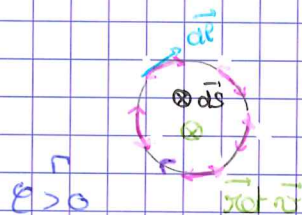
$$\mathcal{C} = 2\pi r^2 \omega$$

$$\int_{\text{Disque}} \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int 2\omega \vec{e}_z \cdot dS \vec{e}_z = 2\omega \int dS = 2\omega \pi r^2$$

Le théorème est vérifié.

• tourbillon marginal au bord d'une aile d'avion

cf. Figure 8



5. Vortex de Rankine

Exercice classique
→ concours

C'est un modèle de tourbillon tq :

en coordonnées cylindriques :

$$r < a, \vec{\Omega} = \Omega_0 \vec{e}_z$$

$$r > a, \vec{\Omega} = \vec{0}$$

hypothèse : $\vec{v} = v_\theta(r) \vec{u}_\theta$

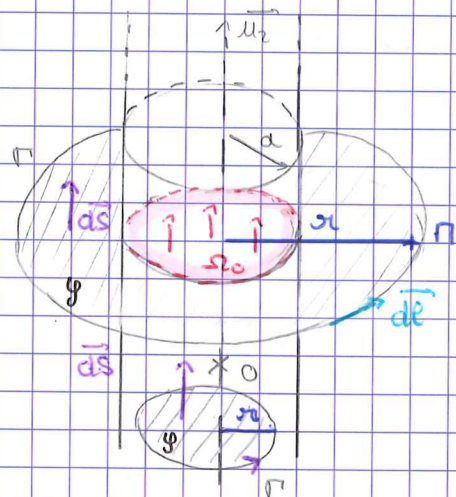
question : Trouver $\vec{v}$!

Méthode 1 :

- on exprime $\text{rot } \vec{v}$ avec le formulaire

- on l'identifie à $2\vec{\Omega}$

r on conclut



Méthode 2: avec Stokes

Γ = cercle de rayon x

$$\oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Gamma} v(x) \vec{u}_{\theta} \cdot d\vec{\ell} \vec{u}_{\theta} = v(x) \times 2\pi x$$

• si $x \leq a$

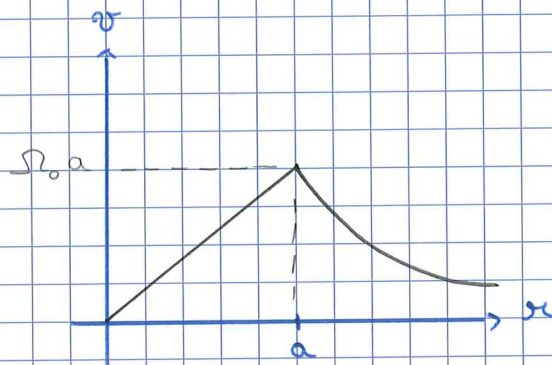
$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}} \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{S} &= \int_{\mathcal{G}} 2\vec{\Omega} \cdot d\vec{S} \\ &= 2 \int \Omega_0 \vec{u}_z \cdot d\vec{S} \vec{u}_z \\ &= 2\Omega_0 \pi x^2 \end{aligned}$$

$$\text{Stokes: } 2\pi x v = 2\Omega_0 \pi x^2 \Rightarrow v = x\Omega_0$$

• si $x \geq a$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}} \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{S} &= \int_{\mathcal{G}} 2\vec{\Omega} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\text{Disque } a} 2\Omega_0 \vec{u}_z \cdot d\vec{S} \vec{u}_z \\ &= 2\Omega_0 \pi a^2 \end{aligned}$$

$$\text{Stokes: } 2\pi x v = 2\Omega_0 \pi a^2 \Rightarrow v = \Omega_0 \frac{a^2}{x}$$



G. Écoulements irrotationnels

a). Définition et conséquence

Dans un écoulement irrotationnel: $\forall \Pi, \text{rot } \vec{v}(\Pi) = \vec{0}$

Conséquence:

$\exists \varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que: $\forall \Pi, \vec{v}(\Pi) = \text{grad } \varphi(\Pi)$

Rq: la réciproque est triviale.

$$\text{si } \vec{v} = \text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi$$

$$\text{alors } \text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{0}$$

φ s'appelle le potentiel des vitesses.

b) Écoulement irrotationnel incompressible

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad \text{or } \vec{v} = \text{grad } \varphi$$

$$\text{div } (\text{grad } \varphi) = 0$$

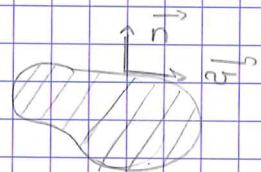
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = 0$$

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{équation de Laplace}$$

Equation fréquente en physique et très étudiée.

Conditions de Bords: CB (sur $\vec{v}$)

- $\vec{v}$ donnée
- sur un obstacle imperméable fixe:
 $\vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$
ou $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$
↳ pas de débit



→ si l'obstacle bouge, un changement de référentiel montre que:

$$\forall \Pi \in \varphi, (\vec{v}'(\Pi) - \vec{v}_{\text{obstacle}}(\Pi)) \cdot \vec{n} = 0$$

Application classique: la théorie des vagues.

c) Exemple: écoulement autour d'une boule

9

cf. Figure 9

En coordonnées sphériques,

$$\left. \begin{array}{l} \bullet r \rightarrow \infty, \quad \vec{v} \rightarrow U \vec{u}_z \\ \bullet r = R \quad \vec{v}(R) \cdot \vec{u}_r = 0 \end{array} \right\} \text{CB.}$$

Supposons l'écoulement irrotationnel incompressible

→ à résoudre avec $\Delta \varphi = 0$

eq. linéaire ici: invariance par rotation autour de $(0, \vec{u}_z)$; $\varphi = \varphi(r, \theta)$

$$\text{on résout: } \Delta \varphi(r, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\text{la solution est } \varphi = U \left(r + \frac{R^3}{2r^2} \right) \cos \theta$$

• vérification de $\Delta \varphi = 0$ (à faire avec formulaire)

$$\begin{aligned} \bullet \vec{v} &= \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \\ &= U \cos \theta \left(1 - \frac{2R^3}{2r^3} \right) \vec{u}_r - U \sin \theta \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

CB: • $r = R$

$$\vec{v}_r = 0 \quad \text{OK}$$

• $r \rightarrow \infty$

$$\vec{v} = U (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta) = U \vec{u}_z$$

en projection

ldc: cf. Figure 10

• Pour $r = R$: $\theta = 0$ ou π donc $\vec{v} = \vec{0}$: point de stagnation

• Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $r = R$ donc $\vec{v} = -U \times \frac{3}{2} \vec{u}_\theta$

