

Forces de contact dans un fluide

①

I - Forces de pression

1 Forces de volume et forces de surface

cf. Figure 1 : système

des forces de contact/surface s'exerce sur la frontière et des forces à distance s'exercent sur dG .

• forces sur dG : exemples :

$$* d\vec{P} = -dm \vec{g} = \rho dG \vec{g}$$

$$* d\vec{F}_{ie} = -dm \vec{a}_e = -\rho dG \vec{a}_e$$

$$* d\vec{F}_{ic} = -dm \vec{a}_c = -\rho dG \times 2\vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$* \text{électromag : } d\vec{F}_{em} = dq \vec{E} + I d\vec{P} \wedge \vec{B}$$

$$= \rho_{elec} dG \vec{E} + \vec{j}_{elec} dG \wedge \vec{B}$$

Dans ces cas :

$$d\vec{F}_v = \vec{f}_v dG$$

ex : pour le poids $\vec{f}_v = \rho \vec{g}$

densité volumique
de force en $N \cdot m^{-3}$

2. Forces de pression et utilisation

cf. Figure 2

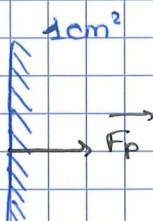
Sur dS s'exerce $d\vec{F}_s$, on appelle force de pression sa composante perpendiculaire à $d\vec{S} = dS \vec{n}$

$$d\vec{F}_p = p d\vec{S} = p dS \vec{n}$$

p : $[N \cdot m^{-2}]$ ou Pa

ex 1 :

$p = 6 \text{ bar}$

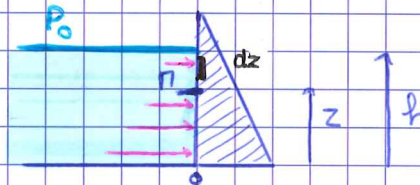


$$F_p = pS = 6 \times 10^5 \times (10^{-2})^2$$

$$F_p = 60 \text{ N}$$

ex 2: barrage

$$P(z) = P_0 + \rho g (h - z)$$

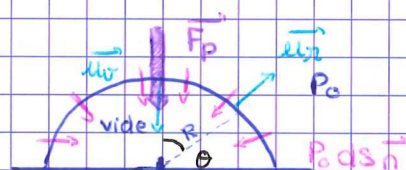


plus la profondeur $\nearrow$, plus $P \nearrow$

$$\begin{aligned} F_p &= \int_0^h P(z) dS = \int_0^h (P_0 + \rho g (h - z)) L dz \\ &= P_0 L h + \rho g L \left[h z - \frac{z^2}{2} \right]_0^h \\ &= P_0 L h + \rho g \frac{L h^2}{2} \end{aligned}$$

ex 3:

Par symétrie, la somme des forces de pression est verticale.



$$d\vec{F}_p = P_0 dS (-\vec{u}_z)$$

en projetant sur la verticale: $dF_{pv} = P_0 dS \cos \theta$

$$\begin{aligned} F_{pv} &= \int dF_{pv} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} P_0 \cos \theta R d\theta R \sin \theta d\varphi \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{élémt de surface en sphérique}} \\ &= P_0 R^2 \times 2\pi \times \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta}_{1/2} \end{aligned}$$

$$F_{pv} = \pi R^2 P_0$$

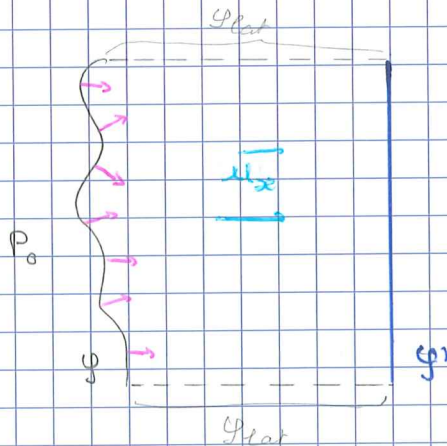
Remarque: on obtiendrait la même force sur un disque qui serait la projection de la sphère sur le plan.

* Petit théorème sur la pression:

Soit une surface S soumise à une pression P_0 .

Soit $\vec{u}_x$ un vecteur unitaire.

La projection sur $\vec{u}_x$ des forces de pression que S subit est la même que sur la projection de S perpendiculairement à $\vec{u}_x$.

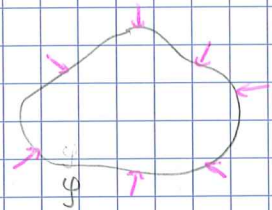


$$F_{pse} = y' p_0$$

(démonstration plus loin)

* autre propriété : $\oint p_0 d\vec{s} = \vec{0}$

Sur une surface fermée les forces de pression atmosphériques se neutralisent



↳ conséquence : le petit théorème sur la pression

il suffit de considérer la surface fermée $\mathcal{V} \cup \mathcal{S}' \cup \mathcal{S}_{ext}$

3. Équivalent volumique des forces de pression

cf. Figure 3

On considère $d\mathcal{V}$ au sein du fluide.

Il subit 6 forces de pression :

$$d\vec{F}_1 = p(x, y, z) dy dz \vec{u}_x$$

$$d\vec{F}_4 = -p(x+dx, y, z) dy dz \vec{u}_x$$

$$d\vec{F}_1 + d\vec{F}_4 = -dy dz \vec{u}_x (p(x+dx, y, z) - p(x, y, z))$$

$$= -dy dz dx \frac{\partial p}{\partial x} \vec{u}_x$$

$$= -d\mathcal{V} \frac{\partial p}{\partial x} \vec{u}_x$$

$$d\vec{F}_2 + d\vec{F}_5 = -d\mathcal{V} \frac{\partial p}{\partial y} \vec{u}_y$$

$$d\vec{F}_3 + d\vec{F}_6 = -d\mathcal{V} \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z$$

Au total : l'élément de fluide est soumis à : $d\vec{F}_p = -d\mathcal{V} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z \right)$

$$d\vec{F}_p = -\vec{\text{grad}} p d\mathcal{V}$$

On pose $d\vec{F}_p = \vec{f}_p d\vec{z}$

$$\vec{f}_p = -\vec{\text{grad}} P$$

$[N \cdot m^{-3}]$

équivalent volumique
des forces de pression

4. Statique des fluides

Dans un fluide à l'équilibre, cf. Figure 2 $d\vec{F}_s$ se réduit à $d\vec{F}_p$, elle n'a pas de composante tangente à la surface (ici en ---).

Une particule fluide est soumise à : $\vec{f}_p d\vec{z}$ et $\vec{f}_v d\vec{z}$

A l'équilibre, on a : $\vec{f}_p d\vec{z} + \vec{f}_v d\vec{z} = \vec{0}$

$$\vec{f}_p + \vec{f}_v = \vec{0}$$

$$-\vec{\text{grad}} P + \vec{f}_v = \vec{0}$$

$$\vec{\text{grad}} P = \vec{f}_v$$

souvent, $\vec{f}_v = \rho \vec{g}$

Δ * liquide (incompressible) : $\rho = \text{cste}$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \rightarrow \text{Pascal PCST}$$

* gaz (compressible) : ρ dépend de P, $\rho = \frac{MP}{RT} \rightarrow \text{PCST}$

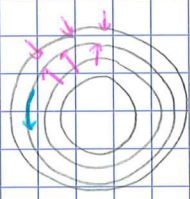
II - Forces de viscosité

1. Mise en évidence et définition

des forces visqueuses sont les composantes de $d\vec{F}_s$ tangentes à dS .

cf. Figure 4

Ce sont des frottements internes au fluide ou sur les parois qu'il rencontre.



sauf de peinture, les cordes sont les différentes couches de peinture

La mise en rotation des couches de peinture témoigne d'une force tangentielle au cylindre.

2. Forces visqueuses dans un fluide Newtonien.

cf. Figure 5

d'écoulement est de la forme $\vec{v}(\Pi) = v(y, t) \vec{u}_x$

Dans ce cas simple, la force exercée sur dS par la couche du dessous sur celle du dessus est:

$$d\vec{F}_{\text{visq}} = -\eta \frac{\partial v}{\partial y} dS \vec{u}_x$$

viscosité dynamique
du fluide

[Pa · s ou Poise]

loi phénoménologique qui rappelle Fick et Fourier.

valable pour tous les fluides banals.

3. Équivalent volumique des forces visqueuses

cf. Figure 6

↳ par le principe des actions réciproques, l'élément de volume

$$\begin{aligned} \text{est soumis à } d\vec{F}_{\text{visq, tot}} &= d\vec{F}_{\text{visq}}(y, t) - d\vec{F}_{\text{visq}}(y+dy, t) \\ &= -dy \frac{\partial}{\partial y} d\vec{F}_{\text{visq}}(y, t) \end{aligned}$$

$$= -dy \frac{\partial}{\partial y} \left(-\eta \frac{\partial v}{\partial y} \vec{u}_x dS \right)$$

$$= \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dS dy \vec{u}_x$$

$$= \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} d\tau \vec{u}_x$$

$$d\vec{F}_{\text{visq, tot}} = \vec{f}_{\text{visq}} d\tau$$

$$\vec{f}_{\text{visq}} = \eta \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} \vec{u}_x \quad [\text{N} \cdot \text{m}^{-3}]$$

équivalent
volumique des
forces visqueuses

Dans le cas général, $\vec{v}$ a 3 composantes

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z, t) \\ v_y(x, y, z, t) \\ v_z(x, y, z, t) \end{pmatrix}$$

dans ce cas on admet : $\vec{f}_{\text{visq}} = \eta \Delta \vec{v}$

la phrase du laplacien :

"

le laplacien d'un vecteur est un vecteur. En coordonnées cartésiennes on l'obtient en calculant les laplaciens de chaque composante du vecteur de départ."

$$\Delta \vec{v} = \begin{cases} \Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \Delta v_y = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \Delta v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

III - Forces de tension superficielle (HP)

1. Energie interfaciale.

Une interface est associée à l'existence de forces et d'énergies.

S : l'aire de l'interface

$$E = \gamma S \quad \text{ou} \quad dE = \gamma dS$$

énergie
de surface

tension superficielle $[\text{J} \cdot \text{m}^{-2}]$

Quand on néglige ces forces, la pression est continue aux interfaces.