

Dynamique des fluides

I- Dynamique locale des écoulements visqueux.

1. Accélération particulaire

$$\vec{v}(\vec{r}, t)$$

Le champ d'accélération est $\vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{D\vec{v}}{Dt}(\vec{r}, t)$

Cartésiennes :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } v_x \\ a_y = \frac{Dv_y}{Dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } v_y \\ a_z = \frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } v_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

on admet $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v}$

2. Equation de Navier - Stokes et conditions de bord

syst: particule fluide de volume $d\vec{\tau}$

bdf:

- $\int_P d\vec{\tau} = - \text{grad } P \cdot d\vec{\tau}$
- $\int_{\text{visq}} d\vec{\tau} = \eta \Delta \vec{v} \cdot d\vec{\tau}$
- $\int_{\text{autres}} d\vec{\tau}$ (souvent $= \rho \vec{g} \cdot d\vec{\tau}$)

2^{ème} loi de Newton:

$$\rho d\vec{G} \cdot \vec{a} = \vec{f}_p d\vec{G} + \vec{f}_{visq} d\vec{G} + \vec{f}_{autres} d\vec{G}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\text{grad } P + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}_{autres} \quad \text{(NS)}$$

équation de Navier-Stokes

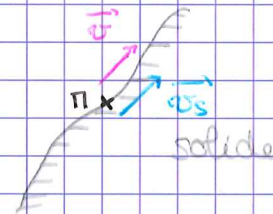
sovent $\rho \vec{g}$

Cette équation régit la dynamique des fluides Newtoniens incompressibles.

Conditions de bord:

- Sur la paroi,

$$\vec{v}(\Pi, t) = \vec{v}_s(\Pi)$$



donc sur un solide immobile

on a $\vec{v} = \vec{0}$

- A l'interface de deux fluides, on a continuité des forces de contact

- * P est continue

- * force visqueuse continue $\left(-\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$

cette force s'annule à la surface d'un liquide par exemple.

Dans l'équation de Navier-Stokes, les inconnues sont P et $\vec{v}$. Elle est non linéaire et sacrément difficile!

On la résout dans des cas simples.

3. Écoulement de Poiseuille plan

2

cf. Figure 1

hypothèses : $\vec{v} = v(x, y) \vec{e}_x$ écoulement stationnaire

incompressible : $\text{div} \vec{v} = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\vec{v} = v(y) \vec{e}_x$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\bullet \vec{v} \cdot \vec{\nabla} = v \frac{\partial}{\partial x}$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = v \frac{\partial}{\partial x} (v(y) \vec{e}_x) = \vec{0}$$

$$\bullet \Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{e}_x$$

$$\bullet \text{faibles} = -\rho g \vec{e}_y$$

NS :

$$\vec{e}_x : \begin{cases} 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{d^2 v}{dy^2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\vec{e}_y : \begin{cases} 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g$$

$$P = -\rho g y + K(x)$$

$$(1) \quad 0 = -\frac{dK(x)}{dx} + \eta \frac{d^2 v}{dy^2}$$

$$\frac{dK(x)}{dx} = \eta \frac{d^2 v}{dy^2}$$

Le membre de droite ne dépend que de y celui de gauche que de x .

On en déduit, $\exists C \in \mathbb{R}$, $\frac{dK}{dx} = C$ et $\eta \frac{d^2 v}{dy^2} = C$

$$\text{on } \frac{\partial P}{\partial x} = C = \frac{P_2 - P_1}{L}$$

Sur la verticale, on a un effet hydrostatique (loi de Pascal)
et sur l'horizontal un gradient de pression imposé

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{C}{\eta} = \frac{P_2 - P_1}{L\eta}$$

$$v = \frac{1}{2} \frac{P_2 - P_1}{L\eta} y^2 + Ay + B$$

$$\text{CB: } \begin{cases} v(y=0) = 0 & \leadsto B=0 \\ v(y=e) = 0 & \leadsto A = -\frac{1}{2} \frac{P_2 - P_1}{\eta L} e \end{cases}$$

$$v = \frac{1}{2} \frac{P_2 - P_1}{\eta L} y (y - e) \quad \hookrightarrow \text{parabole}$$

On donne une largeur H selon z .

$$\begin{aligned} Dv &= \int \vec{v} \cdot d\vec{S} \\ &= \int v(y) dy \cdot H dy \cdot dz \\ &= H \int_0^e \frac{1}{2} \frac{P_2 - P_1}{\eta L} (y^2 - ey) dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{H}{\eta L} (P_2 - P_1) \times \left(\frac{-e^3}{6} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{H}{L\eta} \frac{e^3}{6} (P_1 - P_2) \end{aligned}$$

4. Ecoulement de Couette plan

3

cf. Figure 2

3 hypothèses :

idem mais $v(y=e) = v_0 \Rightarrow Ae = v_0 \Rightarrow A = \frac{v_0}{e}$
et $P_2 = P_1$ donc $P_2 - P_1 = 0$

$$v = \frac{v_0}{e} y$$

force exercée par le fluide sur la paroi supérieure :
visqueuse

$$\text{loi de Newton: } d\vec{F} = -\eta \frac{\partial v}{\partial y} dS \vec{u}_x \\ = -\eta \frac{v_0}{e} dS \vec{u}_x$$

$$\vec{F} = -\eta \frac{v_0}{e} S \vec{u}_x$$

$$\vec{F} = -\eta \frac{S}{e} v_0 \vec{u}_x \quad \text{force opposée à la vitesse du solide.}$$

5. Ecoulement de Poiseuille cylindrique

cf. Figure 3

$\Delta P = P_2 - P_1$, imposé $\Delta P < 0$

hypothèses :

$$\vec{v} = v(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

$$\text{incompressible : } \operatorname{div} \vec{v} = 0 : \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

• NS :

$$* \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$* \vec{v} \cdot \vec{\nabla} = v \frac{\partial}{\partial z}$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = v \frac{\partial (v(r) \vec{u}_z)}{\partial z} = \vec{0}$$

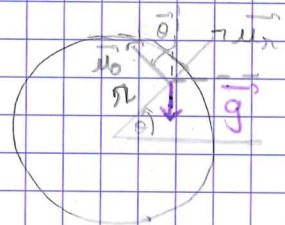
penser
momentanément
en coordonnées

$$* \Delta \vec{v} = (\Delta v) \vec{u}_z$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{u}_z$$

$$\vec{g} = -g \cos \theta \vec{u}_\theta - g \sin \theta \vec{u}_z$$

$$\vec{\text{grad}} P = \frac{\partial P}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z$$



NS

$$\vec{u}_r : \begin{cases} 0 = -\frac{\partial P}{\partial r} - g \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

$$\vec{u}_\theta : \begin{cases} 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \rho g \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

$$\vec{u}_z : \begin{cases} 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \end{cases} \quad (3)$$

$$(1) \quad P = -\rho g r \sin(\theta) + k(\theta, z)$$

$$\leadsto (2) \quad 0 = -\frac{1}{r} (-\rho g r \cos(\theta)) - \frac{1}{r} \frac{\partial k}{\partial \theta} - \rho g \cos \theta$$

$$\frac{\partial k}{\partial \theta} = 0 \quad k = k(z)$$

$$P = -\rho g r \sin(\theta) + k(z)$$

loi de Pascal

variation hydrostatique dans chaque plan de coupe.

$$(3) \quad \frac{dk}{dz} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$$

$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \frac{dk}{dz} = C \quad \text{et} \quad \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = C$$

$$\text{avec} \quad C = \frac{P_2 - P_1}{L} = \frac{\Delta P}{L}$$

$$\eta \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{\Delta P}{L} r$$

$$r \frac{dv}{dr} = \frac{\Delta P}{4\eta} \frac{r^2}{L} + D \quad (\text{faute } r=0)$$

$$v = \frac{\Delta P}{8\eta L} \frac{r^2}{2} + E$$

$$\text{Or } v(a) = 0$$

$$\text{donc} \quad v = \frac{P_2 - P_1}{4\eta L} (r^2 - a^2)$$

$$D_v = \int \vec{\sigma} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{e}_z$$

$$= \iint \frac{P_2 - P_1}{4\eta L} (r^2 - a^2) \cdot r dr d\theta$$

$$= \frac{P_2 - P_1}{4\eta L} \times 2\pi \int_0^a (r^2 - a^2) r dr$$

$$= \frac{P_2 - P_1}{2\eta L} \pi \times \left(\frac{a^4}{4} - \frac{a^2 a^2}{2} \right)$$

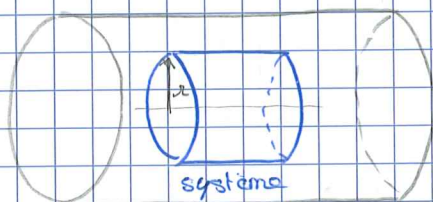
$$D_v = \frac{\pi a^4}{8\eta L} (P_1 - P_2)$$

↳ par analogie avec d'autres domaines

on peut définir une conductance hydrolique : $G_{Hq} = \frac{\pi a^4}{8\eta L}$

Plutôt que d'appliquer brutalement NS, on peut revenir au PFD à une échelle plus grande.

ex:



6. Démarrage brutal d'un bord plan.

CI: $t \leq 0 \quad \vec{\sigma} = \vec{0}$

CB: pour $t > 0$, $\vec{\sigma}(y=0, t) = \vec{\sigma}_0$

hypothèses: $\vec{\sigma} = \sigma(y, t) \vec{e}_x$

* $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\sigma} = \vec{0}$

* non stationnaire: $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \vec{e}_x$

* $\Delta \vec{\sigma} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \vec{e}_x$

$$NS_x : e \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (1)$$

$$NS_y : 0 = - \frac{\partial P}{\partial y} - e g \quad (2)$$

$$(2) \quad P = - e g y + K(x, t)$$

$$CB : y = h, \quad P = P_0 \quad \Rightarrow P_0 = - e g h + K(x, t)$$

$$K = P_0 + e g h$$

$$P = P_0 + e g (h - y) \quad \text{Pascal}$$

Retour à (1) :

$$e \frac{\partial v}{\partial t} = 0 + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\text{avec } \nu = \frac{\eta}{e} \quad [m^2 \cdot s^{-1}]$$

cf. équation de diffusion

viscosité cinématique

la viscosité est un phénomène diffusif

ici le mouvement diffuse de bas en haut.

cf. Figure 5

La solution est ici : $v(y) = v_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right]$

Voir l'évolution : cf. Figure 6

A t donné, on définit l'épaisseur δ de la région qui a une vitesse "élevée" par $v(\delta, t) = \frac{v_0}{2}$

$$v_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\delta}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right] = \frac{v_0}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\delta}{2\sqrt{\nu t}} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{erf} \left(\frac{\delta}{2\sqrt{\nu t}} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{d'après le graphe } \frac{\delta}{2\sqrt{\nu t}} \approx 0,5$$

donc $\delta \approx \sqrt{\nu t}$ on retrouve la loi d'échelle des phénomènes diffusifs.

À un instant donné, une couche d'épaisseur bornée est significativement concernée par le mouvement de la plaque.

5

II - Nombre de Reynolds et régimes d'écoulements

Soit U une vitesse de fluide.

Soit L une longueur.

et $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ la viscosité cinématique.

On appelle nombre de Reynolds $Re = \frac{UL}{\nu}$ sans dimension

On l'évalue en prenant pour U une vitesse caractéristique et L une longueur caractéristique de l'écoulement.

1. Analyse d'ordre de grandeur :

$$\text{NS : } \underbrace{\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right)}_{\vec{Q}_{\text{conv}}} = \underbrace{-\nabla P + \rho \vec{g}}_{\vec{Q}_{\text{diff}}} + \underbrace{\eta \Delta \vec{v}}_{\vec{Q}_{\text{diff}}}$$

On compare en ODE Q_{conv} et Q_{diff} .

U : ODE de $\vec{v}$ ou ODE des variations de $\vec{v}$

L : échelle de longueur des variations de $\vec{v}$.

$$\|\vec{Q}_{\text{conv}}\| \approx \rho U \times \frac{1}{L} \times U \quad \|\vec{Q}_{\text{diff}}\| \approx \eta \frac{U}{L^2}$$

$$\approx \rho \frac{U^2}{L}$$

$$\frac{\|\vec{Q}_{\text{conv}}\|}{\|\vec{Q}_{\text{diff}}\|} \approx \frac{\rho \frac{U^2}{L}}{\eta \frac{U}{L^2}} = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{UL}{\nu}$$

$$\frac{\|\vec{Q}_{\text{conv}}\|}{\|\vec{Q}_{\text{diff}}\|} \approx Re$$

Cette analyse est grossière, elle utilise une seule échelle de longueur et néglige les particularités géométriques.

2. Classification des écoulements

* si $Re \ll 1$: écoulement rampant.

ex: journal dans le miel

$\overrightarrow{Q_{acc}}$ négligeable

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} \quad \text{linéaire en } \vec{v}$$

div (

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{v}) = -\Delta P + \text{div}(\rho \vec{g}) + \eta \Delta \text{div } \vec{v}$$

Re qd on écrit
Ns il faut que
soient
incompressible

incompressible : $\text{div } \vec{v} = 0$

$$\Delta P = 0 \quad \rightarrow \text{"facile à résoudre"}$$

* si $Re \gg 1$:

ex: baleine dans l'océan

$\overrightarrow{Q_{acc}}$ négligeable

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}$$

↳ écoulement parfait.

3. Règle empirique de Reynolds sur la turbulence

Il y a deux types d'écoulements : cf. poly

Selon les circonstances, les solutions de l'équation de Navier-Stokes sont laminaires ou turbulentes.

Règle empirique de Reynolds : cf. poly

Par exemple pour l'écoulement dans un tuyau $Re_c \approx 2400$



$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

$L = D$ (les variations de vitesse se font rapidement)

Le calcul I.S représente la réalité

si $Re < 2400$

$$U = \frac{Dv}{4R^2} \quad (\text{+/- moyenne à partir du débit})$$

4. Écoulement autour d'une sphère

6

boule immobile : ($R=a$)

au loin $\vec{v} \rightarrow \vec{U}$

elle est soumise à des forces dues à la pression et à

la viscosité:
$$\vec{F} = \underbrace{\vec{F}_t}_{\parallel \vec{U}} + \underbrace{\vec{F}_p}_{\perp \vec{U}}$$

Force de traînée

Force de portance

Ces forces ne contiennent pas la poussée d'Archimède.

Ici $\vec{F}_p = \vec{0}$. (la boule n'est ni poussée vers le haut ni vers le bas)

Selon $Re = \frac{U \times D}{\nu}$ ← diamètre de la boule

cf. Régimes d'écoulement autour d'une sphère. à savoir

A petit Re , on étend la formule avec C_d mais avec C_d variable.

$$6\pi\eta R V = C_d \pi R^2 \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$C_d = \frac{12\eta}{RV\rho} = \frac{24}{D}\frac{\eta}{\rho} = \frac{24\nu}{DV} = \frac{24}{Re}$$

Avec $C_d = \frac{24}{Re}$, $F = C_d \pi R^2 \frac{1}{2} \rho V^2$ redonne la formule de Stokes.

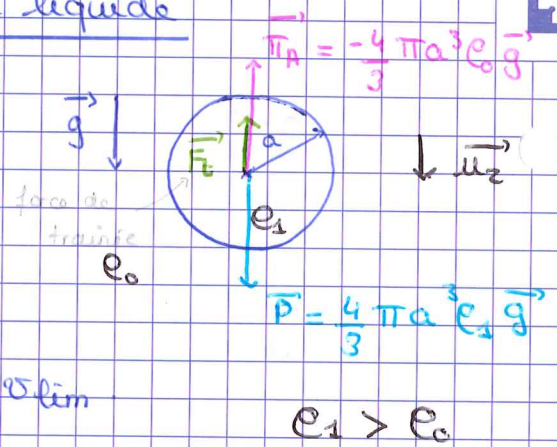
De manière générale, on mesure F et en déduit C_d .

cf. p.7. coefficient de traînée d'une sphère

5. Chute d'une bille dans un liquide

$v_{\text{lim}} ?$

Quand $v = v_{\text{lim}}$ = est un changement de référentiel galiléen montre que les résultats de 4) s'appliquent avec $U = v_{\text{lim}}$



$$\text{Alors : } 0 = \frac{4}{3} \pi a^3 e_1 g - \frac{4}{3} \pi a^3 e_0 g - F_t$$

$$F_t = \frac{4}{3} \pi a^3 (e_1 - e_0) g$$

F_t dépend de v_{lim}

$$R = a$$

• Si $Re \lesssim 1$ $F_t = 6\pi\eta R v_{\text{lim}}$

$$v_{\text{lim}} = \frac{\frac{4}{3} \pi a^3 (e_1 - e_0) g}{6\pi\eta a}$$

$$v_{\text{lim}} = \frac{2}{9} \frac{a^2}{\eta} (e_1 - e_0) g \quad (1)$$

$$Re = \frac{v_{\text{lim}} \times 2a}{\eta/e_0}$$

• Si $Re \gtrsim 10^3$ $F_t = C_d \times \pi a^2 \times \frac{1}{2} e_0 v_{\text{lim}}^2$

($C_d = 0.4$)

$$v_{\text{lim}}^2 = \frac{\frac{4}{3} \pi a^3 (e_1 - e_0) g}{C_d \pi a^2 \frac{1}{2} e_0}$$

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{a g (e_1 - e_0)}{e_0 C_d}} \quad (2)$$

exemples

• une bille de verre : $e_1 = 2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ $a = 1 \text{ mm}$
dans du glycérol : $e_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3$ $\eta = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

(1) $v_{\text{lim}} = 3,3 \text{ mm/s}$ $Re = 6,5 \times 10^{-3}$ ouf! $Re \ll 1$

- une bille en acier : $\rho_s = 8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ - $a = 1 \text{ cm}$
dans l'air : $\rho_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ $\eta = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

(2) $v_{\text{lim}} = 63 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $Re = 9 \times 10^4 > 10^3$ cuf^1

III - Ecoulement parfait

1. Couche limite selon le raisonnement de Stokes

cf. Figure 9

Les frottements visqueux et la présence du solide se font sentir dans une couche d'épaisseur δ près du solide.

(analogie avec I.6). Cette région s'appelle couche limite (d'épaisseur δ)

$$\delta \approx \sqrt{\nu t'}$$

$$t' \approx \frac{x}{U}$$

$$\delta \approx \sqrt{\nu \frac{x}{U}}$$

t' est l'ODG du temps mis pour aller de l'abscisse 0 à l'abscisse x .

En $x = L$, $\delta \approx \sqrt{\frac{\nu L}{U}} \approx \sqrt{\frac{\nu L^2}{UL}} \approx L \sqrt{\frac{\nu}{UL}}$

$$\delta \approx \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

2. Couche limite par analyse d'ordre de grandeur

dans NS : $\overrightarrow{Q_{\text{conv}}} = \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ $\overrightarrow{Q_{\text{diff}}} = \eta \Delta \vec{v}$

Hors de la couche limite, $\overrightarrow{Q_{\text{diff}}}$ est faible.

Au bord de la couche limite, $\overrightarrow{Q_{\text{conv}}}$ et $\overrightarrow{Q_{\text{diff}}}$ sont comparables.

Au bord de la couche limite :

ODG : $\|\overrightarrow{Q_{\text{conv}}}\| \approx \rho \times \frac{1}{L} \times U$

$$\vec{v} \cdot \nabla \approx U \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\vec{v} \cdot \nabla \approx U \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\|\vec{Q}_{diff}\| \approx \eta \frac{U}{\delta^2}$$

En effet, les variations de vitesse associées aux frottements ont lieu sur la verticale (direction de δ)

La vitesse passe de 0 au contact du solide à U quand on se déplace de δ .

$$\delta \text{ est tq } \|\vec{Q}_{diff}\| \approx \|\vec{Q}_{conv}\|$$

$$\eta \frac{U}{\delta^2} \approx \rho \frac{U^2}{L}$$

$$\delta^2 = \frac{L}{U} \frac{\eta}{\rho} = \frac{L\nu}{U}$$

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

comme i)

A retenir: quand un fluide passe près d'un solide, les effets visqueux se font sentir sur une couche proche du solide appelée couche limite.

Parfois la couche limite se "décolle" du solide cf. Figure 10

3. Écoulement parfait et équation d'Euler

Définition: Dans un écoulement parfait, tout phénomène diffusif est négligé. (des particules fluides évoluent de manière adiabatique réversible, c'est-à-dire isentropique)

NS : on néglige $\eta \Delta \vec{v}$

équation d'Euler

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \vec{f}_{autres}$$

le modèle est valable hors des couches limites qui sont minces

si $Re \gg 1$

Quand $Re \gg 1$, $\|\vec{Q}_{diff}\| \ll \|\vec{Q}_{conv}\|$ cf. II.1)

Les conditions de bord sont celles de la cinématique:

$$(\vec{v} - \vec{v}_{\text{obstacle}}) \cdot \vec{n} = 0$$

4. Exemples

* La houle s'étudie dans le modèle du fluide parfait, irrotationnel, incompressible.

* Impllosion d'une cavité cf. Figure 11

fluide parfait: η Air

on néglige la gravité: $\vec{g}$ $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$

$$(*) \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\frac{1}{2} \nabla v^2}_{\text{grad}} - \underbrace{\vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v})}_{\text{rot } \vec{v}} \right) = -\nabla p$$

2 techniques avec l'équation d'Euler

- on projette sur une base
- on la fait "circuler" ($\circ d\vec{r}$ puis on intègre)

Ici, $\vec{\text{rot}} \vec{v} = 0$ (cf. formulaire en sphérique car $\vec{v} = v(r, t) \vec{e}_r$)

La conservation du débit volumique s'écrit:

$D_v = 4\pi r^2 \times v(r, t)$ ne dépend pas de r
on l'évalue à la surface de la cavité.

$$4\pi r^2 v(r, t) = 4\pi R^2 \dot{R}$$

$$v(r, t) = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R^2 \dot{R}}{r^2} \vec{u}_r \right)$$

$$= \frac{2R \ddot{R} + R^2 \ddot{R}}{r^2} \vec{u}_r$$

on dérive à r fixe
par rapport au temps.

♥ Par définition: $\vec{\text{grad}} f \cdot \vec{d\ell} = df$

(*) $\cdot d\vec{P}$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} + \frac{1}{2} d v^2 = -dp$$

on intègre de $r=R$ jusqu'à ∞ :

$$\int_{r=R}^{\infty} \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} + \frac{1}{2} d v^2 \right) = - \int_{p(R)}^{p(\infty)} dp$$

$$\int_R^{\infty} \rho \frac{2R\dot{R}^2 + R^2 \ddot{R}}{r^2} dr + \frac{1}{2} \rho \left[v^2 \right]_{v(R)}^{v(\infty)} = -p(\infty) + p(R)$$

$$\rho (2R\dot{R}^2 + R^2 \ddot{R}) \times \frac{1}{R} - \frac{1}{2} \rho \dot{R}^2 = -p_0 + 0$$

à l'intérieur de la cavité c'est du vide

$$\frac{3}{2} \dot{R}^2 + R \ddot{R} = -\frac{p_0}{\rho}$$

En résolvant cette équ. diff on trouve l'évolution de R au cours du temps.

$$\text{On trouve: } \frac{dR}{dt} = - \sqrt{\frac{2p_0}{3\rho}} \sqrt{\frac{R_0^3}{R^3} - 1}$$

valeur initiale de R

qd $R=0$ l'implosion est terminée

séparation des variables: $\int_{R_0}^0 \frac{dR}{\sqrt{\frac{R_0^3}{R^3} - 1}} = \int_0^{t_f} - \sqrt{\frac{2p_0}{3\rho}} dt$

maths compliquées }

$$-0,747 R_0 = - \sqrt{\frac{2p_0}{3\rho}} t_f$$

$$t_f = \sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \times 0,747 R_0$$

IV - Relation de Bernoulli

9

Ce paragraphe concerne les écoulements parfaits.

1. Énoncé et démonstration

Théorème : Relation de Bernoulli

Soit un écoulement parfait, stationnaire et incompressible sous l'effet des seules forces de pression et de pesanteur.

Alors la somme $P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2$ est constante le long de chaque ligne de courant.

vocabulaire :

$P + \rho g z \rightarrow$ pression statique

$\frac{1}{2} \rho v^2 \rightarrow$ pression dynamique

$P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 \rightarrow$ la "charge"

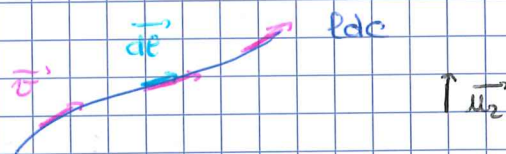
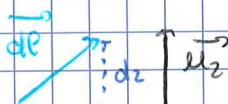
démo :

écoulement parfait :

$$(E) \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g}$$

stationnaire

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$



(E) $\cdot d\vec{\ell}$ donne :

$$\frac{1}{2} \rho dv^2 - \underbrace{\rho (\vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v}) \cdot d\vec{\ell}}_{=0} = -dp - \underbrace{\rho g \vec{u}_z \cdot d\vec{\ell}}_{\rho g dz}$$

$$\frac{1}{2} \rho dv^2 + dp + \rho g dz = 0$$

Comme l'écoulement est incompressible, ρ est constant sur la lde.

$$d\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z\right) = 0$$

On utilise parfois l'hypothèse écoulement homogène, $\rho = \text{cte}$ partout.

Si de plus $\vec{v} = \vec{0}$, la démo marche même hors d'une l.c.
Alors la charge est cte partout.

2. Formule de Torricelli.

cf. Figure 12

Trouver v :

Cst du débit : $v_{\text{vs}} = V \cdot S \quad V = \frac{\lambda}{S} v$

L'écoulement est supposé quasi-stationnaire : h varie lentement.

Écoulement parfait et incompressible :

Bernoulli :

$$\underbrace{P_A}_{P_0} + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z_A = \underbrace{P_B}_{P_0} + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z_B$$

qd un jet est entouré d'air la pression dans le jet est la même que celle de l'air.

$$\frac{1}{2} \rho \frac{\lambda^2}{S^2} v^2 + \rho g z_A = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z_B$$

$$\frac{1}{2} v^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{S^2} \right) = g (z_A - z_B) = gh$$

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{S^2}}} \approx \sqrt{2gh}$$

Loi horaire : $h(t)$?

$$\frac{dh}{dt} = -V = -\frac{\lambda}{S} \sqrt{2gh}$$

on sépare les variables et on intègre.

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{\lambda}{S} \sqrt{2g} dt$$

$$\left[2\sqrt{h} \right]_{h_0}^{h(t)} = -\frac{\lambda}{S} \sqrt{2g} t$$

$$\sqrt{h} - \sqrt{h_0} = -\frac{\gamma}{2S} \sqrt{2g} t$$

3. Effet Venturi

a. Aspect qualitatif

L'effet Venturi est la baisse de pression associée à l'augmentation de vitesse dans un étranglement.

cf. Figure 13

$$P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cste} \quad \text{donc si } v \nearrow, p \searrow$$

b. Mesure de débit par effet Venturi

cf. Figure 14

• eau : incompressible : conservation du débit : $S_A v_A = S_B v_B$

vitesse supposée uniforme dans chaque section
hors des couches limites.

• Bernoulli : $P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{S_A}{S_B} v_A \right)^2$$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1 \right) v_A^2 > 0$$

Il y a une baisse de pression près de B

La mesure de $P_A - P_B$ donne v_A donc le débit

Dans la section A :

$$\vec{u}_2 \left(\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g} \right)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$$

accélération projetée sur la verticale est nulle

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$P_A - P_A' = \rho g h_A \quad (A)$$

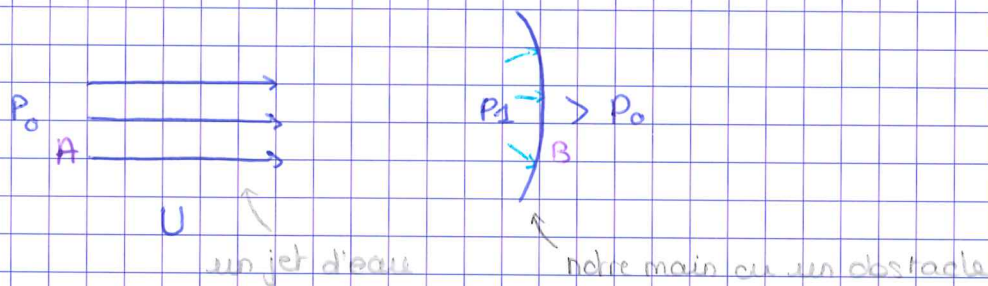
Idem $P_B - P_{B'} = \rho g h_B$ (B)

$$P_A' = P_{B'} = P_0$$

(A) - (B) : $P_A - P_B = \rho g (h_A - h_B)$

$$v_A = \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{\rho_A^2}{\rho_B^2} - 1\right)} g (h_A - h_B)}$$

4. Pression d'arrêt et tube de Pitot



$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho U^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 > P_0$$

$v_B \ll U$ l'eau s'arrête

Application: Tube de Pitot

cf. Figure 15

Sur le point de stagnation, on a: $P_2 = P_0 + \frac{1}{2} \rho U^2$

Au contraire, sur le côté $v \approx U$ $P_1 \approx P_0$

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2} \rho U^2 \quad \Rightarrow \quad U = \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho}}$$

Permet par exemple de mesurer la vitesse ^{relative} d'un avion par rapport à l'air qui l'entoure. La sonde est alors fixée à l'avion. On se place dans le référentiel de l'avion.

5. Force de Magnus et portance

11

a. Force de Magnus sur un cylindre en rotation

cf. Figure 16

En tournant, le cylindre crée des non symétries dans le profil de vitesse avec $v_n > v_B$ et donc $P_n < P_B$

D'où l'existence d'une force de portance perpendiculaire à U .
(cf. TD)

Rq: Application aux sports de balle (raisonner dans le réfé de la balle)



la balle est coupée

b. Portance d'une aile d'avion

cf. Figure 16

les différences de vitesse créent une différence de pression, ce qui crée une force de portance vers le haut

$$\text{Pac e : } p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_e(\eta) + \frac{1}{2} \rho v_e^2(\eta)$$

$$p_e(\eta) = p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{2} \rho v_e^2(\eta) \quad (2)$$

de même :

$$\text{Pac i : } p_i(\eta) = p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{2} \rho v_i^2(\eta) \quad (1)$$

$$v_e > v_i \text{ donc } p_e < p_i$$

Le théorème de Kutta et Joukowski relie la portance à la circulation de la vitesse.

$$F_p \approx \int (p_i(n) - p_e(n)) dS$$

$$\approx \int_A^F (p_i(n) - p_e(n)) L dl$$

$$(1)-(2) \quad p_i - p_e = \frac{1}{2} \rho (v_e^2 - v_i^2)$$

$$= \frac{1}{2} \rho (v_e - v_i) \underbrace{(v_e + v_i)}_{\approx 2U}$$

$$F_p \approx \rho L U \int_A^F (v_e(n) - v_i(n)) dl$$

Par ailleurs : circulation de $\vec{v}$

Γ = le profil de l'aile

$$\mathcal{C} = \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_A^F \vec{v}_e \cdot d\vec{l} + \int_F^A \vec{v}_i \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_A^F v_e(n) dl - \int_F^A \underbrace{v_i(n) dl}_{\rightarrow 0}$$

l'ordre des bornes n'a plus trop d'importance

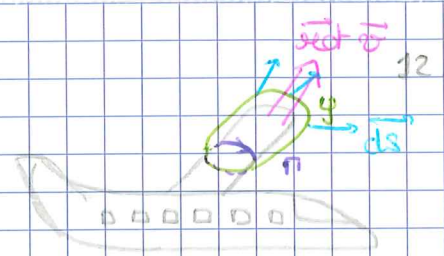
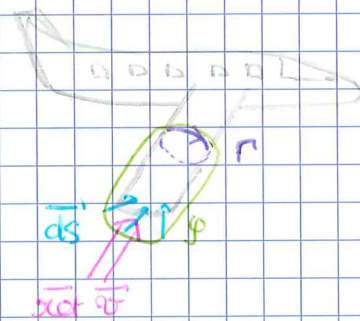
$$= \int_A^F (v_e(n) - v_i(n)) dl$$

$$\left(\text{Rq: } \mathcal{C} = \int_{x_A}^{x_F} v_e(n) dx - \int_{x_A}^{x_F} v_i(n) dx \right)$$

$$F_p = \rho L U \mathcal{C}$$

$$\text{or } \mathcal{C} = \int_{\gamma} \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (\text{Stokes})$$

Ici $\mathcal{C} \neq 0$ donc l'écoulement est tourbillonnaire.



De forts tourbillons existent aux deux bouts des ailes

