

Bilans en mécanique des fluides ~ macroscopique ~

1

Ici on ne raisonne plus à l'échelle mésoscopique, mais à l'échelle macroscopique, celle de l'écoulement tout entier

I- Contexte et méthode

1. Systèmes ouverts et surface de contrôle.

cf. vocabulaire poly

2. Démarche adoptée

cf. méthode poly

cf. figure 1

3. Exemple : bilan de masse

cf. figure 2

Pour Σ fermé : $\Pi_{\Sigma}(t) = \delta m_e + \Pi_{com}(t)$

$$\Pi_{\Sigma}(t+dt) = \delta m_s + \Pi_{com}(t+dt)$$

variation :

$$\begin{aligned} d\Pi_{\Sigma} &= \Pi_{\Sigma}(t+dt) - \Pi_{\Sigma}(t) \\ &= d\Pi_{com} + \delta m_s - \delta m_e \end{aligned}$$

Pour un système fermé, la masse reste constante donc $d\Pi_{\Sigma} = 0$
donc $d\Pi_{com} = \delta m_e - \delta m_s$

(on reconnaît la forme habituelle d'un stock de masse).

$$\Pi_{com} = \int_{t_0}^t e(\Pi, t) dt$$

masse système ouvert

RS : $\rho(n, t) = \rho(n)$, ρ_{com} est constant

donc $d\rho_{com} = 0$

d'où $\delta m_e = \delta m_s$

$$Dm_e = Dm_s$$

$\frac{1}{dt}$

Dans les problèmes sur les bilans : penser à commencer par faire un bilan de masse.

II - Bilans de quantité de mouvement

1. Efforts sur une conduite coudée

cf. Figure 3

On cherche la résultante des forces exercées par l'eau sur le tuyau de A jusqu'à B

Pour Σ fermé,

$$\vec{P}_{\Sigma}(t) = \delta m_e \vec{v}_1 + \vec{P}_{com}(t)$$

$$\vec{P}_{\Sigma}(t+dt) = \delta m_s \vec{v}_2 + \vec{P}_{com}(t+dt)$$

$$d\vec{P}_{\Sigma} = \delta m_s \vec{v}_2 - \delta m_e \vec{v}_1 + d\vec{P}_{com}$$

RS : $\delta m_s = \delta m_e = Dm dt$

$$d\vec{P}_{com} = \vec{0}$$

$$d\vec{P}_{\Sigma} = Dm dt (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\frac{d\vec{P}_{\Sigma}}{dt} = Dm (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

• Forces sur Σ ?

• poids $m\vec{g}$

• $F_{t/eau}$

• $p_1 S \vec{u}_x - p_2 S \vec{u}_y$

$$\frac{d\vec{P}_E}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = m\vec{g} + p_1 S \vec{u}_x - p_2 S \vec{u}_y + \vec{F}_{\text{eau}}$$

$$\vec{F}_{\text{eau}/t} = - \vec{F}_{t/\text{eau}}$$

$$\vec{F}_{\text{eau}/t} = m\vec{g} + p_1 S \vec{u}_x - p_2 S \vec{u}_y + D_m (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

Prenons $p_1 = p_2 = p$ et par conservation du débit : $S v_1 = S v_2$

$$v_1 = v_2 = v$$

on a aussi $D_m = \rho Dv = \rho S v$

$$\vec{F}_{\text{eau}/t} = m\vec{g} + p S (\vec{u}_x - \vec{u}_y) + \rho S v (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

$$\vec{F}_{\text{eau}/t} = m\vec{g} + p S (\vec{u}_x - \vec{u}_y) + \underbrace{\rho S v^2 (\vec{u}_x - \vec{u}_y)}_{\text{traduit l'écoulement}}$$

présent même quand l'eau
ne bouge pas

$$\|\rho S v^2 (\vec{u}_x - \vec{u}_y)\| = \rho S v^2 \sqrt{2}$$

On sent mieux l'origine de cette force si on imagine une série de projectiles (ex : ballon de basket) qui rebondit sur le coude et est redirigée vers le haut.

2. Efforts exercés par un jet présentant une surface libre

cf. Figure 4

On cherche les efforts exercés par les fluides sur le fauteuil immobile.

Pour Σ fermé :

$$\vec{P}_E(t) = \delta m_e \vec{v}_1 + \vec{P}_{\text{com}}(t)$$

$$\vec{P}_E(t+dt) = \delta m_s \vec{v}_2 + \vec{P}_{\text{com}}(t+dt)$$

$$RS : \delta m_e = \delta m_s = D_m dt \quad \vec{P}_{\text{com}}(t) = \vec{P}_{\text{com}}(t+dt)$$

$$d\vec{P}_E = D_m dt (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

eau entre A et E

Forces sur Σ

- $m\vec{g}$
- $p_0 S \vec{u}_1 - p_0 S \vec{u}_2$
- $\int_{S_{\text{libre}}} -p_0 d\vec{S}$
- $\vec{F}_{\text{fauteuil/eau}}$

Newton: $D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = m\vec{g} + p_0 S \vec{u}_1 - p_0 S \vec{u}_2 - \int_{S_{\text{libre}}} p_0 d\vec{S} + \vec{F}_{\text{fauteuil/eau}}$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{eau/f}} &= -\vec{F}_{\text{f/eau}} \\ &= m\vec{g} + p_0 S \vec{u}_1 - p_0 S \vec{u}_2 - \int_{S_{\text{libre}}} p_0 d\vec{S} + D_m (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \end{aligned}$$

L'air agit aussi sur la partie sèche du fauteuil qui est au total soumise à $\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_{\text{air/fauteuil}} + \vec{F}_{\text{eau/fauteuil}}$

$$\begin{aligned} &= - \int_{S_{\text{sèche}}} p_0 d\vec{S} + m\vec{g} - \underbrace{p_0 S_1 - p_0 S_2}_{\text{fauteuil}} \\ &\quad - \int_{S_{\text{libre}}} p_0 d\vec{S} + D_m (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \end{aligned}$$

Les termes contenant p_0 peuvent être regroupés en

$$- \oint_{S_{\text{libre}} \cup S_{\text{sèche}} \cup \text{bords}} p_0 d\vec{S} = \vec{0}$$

Finalement au poids près, la force cherchée est juste $\vec{F} = D_m (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$

cf. Figure 5

Le véhicule / mobile est un système ouvert mais dans cet exemple et n'est pas en régime permanent.

Rq : dans Π il y a la masse du gaz + la masse du mobile

Pour Σ fermé ; dans R_T galiléen

$$\vec{P}_{\Sigma}(t) = \Pi(t) \vec{V}(t)$$

$$\vec{P}_{\Sigma}(t+dt) = \Pi(t+dt) \vec{V}(t+dt) + \delta m (\vec{V} + \vec{u})$$

$\vec{u}$ est la vitesse des gaz dans le référentiel du mobile donc dans le référentiel terrestre leur vitesse est $\vec{V} + \vec{u}$ par composition des vitesses.

$$\begin{aligned} d\vec{P}_{\Sigma} &= d(\Pi \vec{V}) + \delta m (\vec{V} + \vec{u}) \\ &= d\Pi \vec{V} + \Pi d\vec{V} + \delta m \vec{V} + \delta m \vec{u} \end{aligned}$$

le bilan de masse mq $d\Pi = -\delta m$

$$d\vec{P}_{\Sigma} = \Pi d\vec{V} + \delta m \vec{u}$$

2nd loi de Newton :

$$\Pi \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{\delta m}{dt} \vec{u} = \vec{R}_{ext}$$

pour résultante

$$\Pi \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{R}_{ext} - D_m(t) \vec{u}$$

c'est celle force qui fait
décoller les fusées

On introduit la force de poussée $\vec{T} = -D_m \vec{u}$

(l'équation s'appelle $m\vec{a} = \sum \vec{F}$)

ex : Propulseur Vulcain de Ariane V :

$$D_m = 250 \text{ kg/s} \quad u = 4 \text{ km/s} \quad T = 10^6 \text{ N}$$

Ici (plus la fusée mais le schéma), projection sur $\vec{u}_0$:

$$\Pi(t) \frac{dV}{dt} = + D_m u_0$$

$$\text{Rq: } \vec{u} = -u_0 \vec{u}_0$$

$$\text{avec } d\Pi = -D_m dt$$

$$\Pi(t) \frac{dV}{dt} = - \frac{d\Pi}{dt} u_0$$

$$dV = - \frac{d\Pi}{\Pi(t)} u_0$$

$$V(t) - V(0) = -u_0 \ln \left(\frac{\Pi(t)}{\Pi(0)} \right)$$

$$V(t) = V(0) + u_0 \ln \left(\frac{\Pi(0)}{\Pi(t)} \right)$$

III - Bilans d'énergie cinétique ou mécanique

1. Principe

$$\text{Pour un système fermé TFC: } dE_c = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}} \quad (\text{PCST})$$

$$\text{TFC: } \frac{dE_c}{dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$$

On distingue parfois des forces extérieures conservatives et les forces extérieures non conservatives:

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{ext},c} + \delta W_{\text{ext},nc} \quad \text{avec } \delta W_{\text{ext},c} = -dE_p$$

donc

$$dE_c = -dE_p + \delta W_{\text{ext},nc} + \delta W_{\text{int}}$$

$$\text{TEN: } d(E_c + E_p) = \delta W_{\text{ext},nc} + \delta W_{\text{int}}$$

En méca flu δW_{int} est exercé par certaines particules fluides sur d'autres particules fluides : pb délicat. Il contient le travail des forces visqueuses (nul si écoulement parfait), le travail des forces de pression (nul pour un écoulement incompressible).

2. Puissance d'une pompe

4

cf. figure 6

Trouver la puissance de la pompe.

Pour Σ fermé,

$$E_m(t) = E_{m,com}(t) + \frac{1}{2} \delta m_{AA'} v_A^2 + \delta m_{AA'} g z_A$$

$$E_m(t+dt) = E_{m,com}(t+dt) + \frac{1}{2} \delta m_{BB'} v_B^2 + \delta m_{BB'} g z_B$$

R.P : $E_{m,com}(t) = E_{m,com}(t+dt)$

$$\delta m_{AA'} = \delta m_{BB'} = D_m dt$$

$$dE_m = \delta m \left(\frac{1}{2} v_B^2 + g z_B - \frac{1}{2} v_A^2 - g z_A \right)$$

$$\frac{dE_m}{dt} = D_m \left(\frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 + gh \right)$$

$$v_2 \gg v_1$$

Puissances en jeu ? (exercées sur l'eau)

* Pompe

* Pirt (< 0 due à la viscosité)

* extrémités : $\delta W = p_0 \delta V_{AA'} - p_0 \delta V_{BB'}$

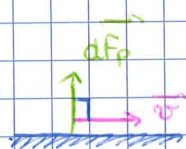
$$P_{p_0} = p_0 (Dv_A - Dv_B)$$

or fluide incompressible : $Dv_A = Dv_B$

donc $P_{p_0} = 0$

* paroi fixe (tuyau)

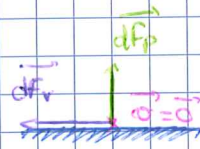
$$P_{paroi} = 0$$



fluide parfait

$$\vec{dF_p} \perp \vec{v}$$

$\vec{dF_p}$ ne travaille pas



fluide visqueux

IPM $D_m \left(\frac{1}{2} v_2^2 + gh \right) = P_{pompe} + P_{irt}$

$$P_{pompe} = D_m \left(\frac{1}{2} v_2^2 + gh \right) - P_{irt} \geq D_m \left(\frac{1}{2} v_2^2 + gh \right)$$

AN : $D_v = 10 \text{ L/s}$

$v_2 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$P_{\text{pompe}} \geq 1.5 \text{ kW}$

$h = 10 \text{ m}$

3. Signification de la relation de Bernoulli

Hypo de type Bernoulli

cf. Figure 7

comme pour 2, on trouve :

$$dE_m = \delta m \left(\frac{1}{2} v_B^2 + g z_B - \frac{1}{2} v_A^2 - g z_A \right) \quad \delta m = \rho D_v dt$$

Travaux ?

◦ $\delta W_{\text{paroi}} = 0$

◦ $\delta W_{\text{extrémité}} = p_1 \delta V_{AA'} - p_2 \delta V_{BB'}$
 $= p_1 D_v dt - p_2 D_v dt$ ← même D_v car incompressible

◦ $P_{\text{int}} = 0$ (parfait et incompressible cf 1.)
 $\delta W_{\text{int}} = 0$

TEP $dE_m = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}}$

$$\cancel{\rho D_v dt} \left(\frac{1}{2} v_B^2 + g z_B - \frac{1}{2} v_A^2 - g z_A \right) = p_1 \cancel{D_v dt} - p_2 \cancel{D_v dt}$$

$$\left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p \right]_A^B = 0$$

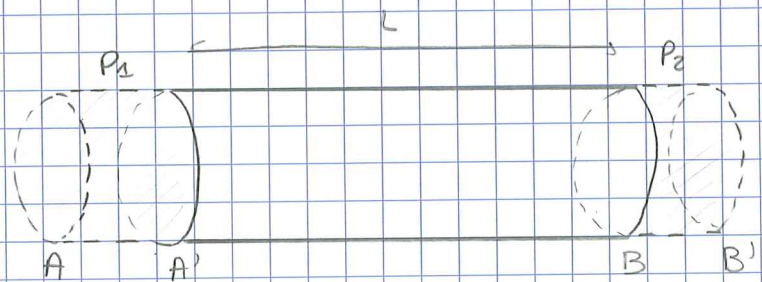
C'est Bernoulli !!

Pour un fluide visqueux on aurait $\delta W_{\text{int}} < 0$ et la charge serait plus petite en B qu'en A.

⚠ Ne pas appliquer la relation de Bernoulli dans une zone avec dissipation d'énergie.

4. Dissipation d'énergie dans l'écoulement de Poiseuille

5.



Pour Σ fermé,

$$dE_m = E_{m, BB'} - E_{m, AA'} \\ = 0$$

Le profil des vitesses en sortie est le même que celui en entrée
les énergies cinétiques sont les mêmes.

$$\delta W_{\text{paroi}} = 0 \quad (\text{cf. 2.})$$

$$\delta W_{\text{extrémité}} = P_1 \delta V_{AA'} - P_2 \delta V_{BB'}$$

$$\delta V_{AA'} = \delta V_{BB'} = D_v dt$$

→ δW_{int} ?

$$\boxed{\text{TEP}} \quad 0 = (P_1 - P_2) D_v dt + \delta W_{\text{int}}$$

$$\delta W_{\text{int}} = - (P_1 - P_2) D_v dt$$

$$P_{\text{int}} = - \underbrace{(P_1 - P_2)}_{>0} D_v < 0$$

Les forces visqueuses sont dissipatives

(Rappelle la puissance électrique $P = UI$)

L'énergie dissipée est évacuée sous forme de chaleur ou convertie en énergie interne.

