

Electrostatique

En PCST, on a rencontré $\vec{E}$ et $\vec{B}$, dans ce chapitre on étudie les champs $\vec{E}$ constants créés par des charges immobiles.

I - Loi de Coulomb et conséquences

1. Description des charges électriques

charge : notée q en Coulomb (C) ; $1\text{C} = 1\text{A}\cdot\text{s}$

charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19}\text{C}$

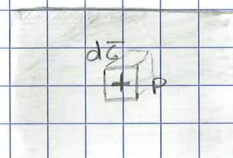
Rq : toutes les charges sont des multiples de e

En général, on étudie l'effet d'une foule de charges élémentaires regroupées à l'échelle mésoscopique.

$$d\vec{\tau} \text{ porte } dQ = \rho(P) d\tau$$

$$\text{C}\cdot\text{m}^{-3}$$

↳ densité volumique de charge



$$\rho(P) = \underbrace{n(P)}_{\text{m}^{-3}} q$$

↳ 1 seule

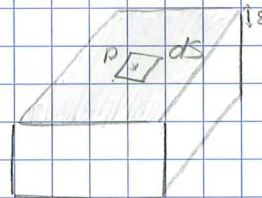
Si plusieurs types de charges sont présents on ajoute leur contribution.

Parfois les charges se répartissent en surface :

$$dQ = \underbrace{\sigma(P)}_{\text{C}\cdot\text{m}^{-2}} dS$$

$$\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$$

↳ densité surfacique de charge

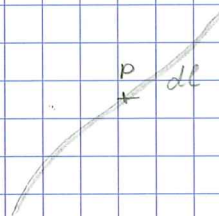


Parfois les charges se répartissent sur une ligne :

$$dQ = \underbrace{\lambda(P)}_{\text{C}\cdot\text{m}^{-1}} dl$$

$$\text{C}\cdot\text{m}^{-1}$$

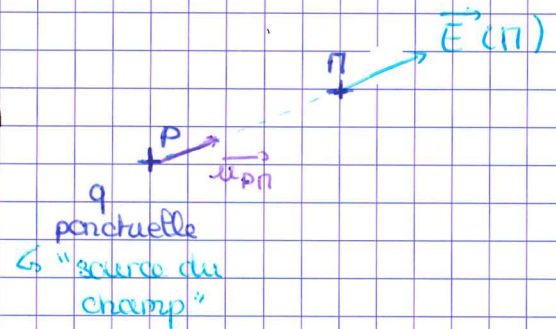
↳ densité linéique de charge



Rq: Soit ε l'épaisseur chargée en-dessous de dS , on peut aussi écrire $dQ = \rho(P) dS \varepsilon$: pour un volume $dV = \varepsilon dS$. On identifie $\sigma(P) = \rho(P) \varepsilon$

2. Loi de Coulomb

$$\vec{E}(\Pi) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{\vec{u}_{P\Pi}}{P\Pi^2} \quad [V \cdot m^{-1}]$$



Une charge test placée en Π
subit la force : $\vec{F} = q' \vec{E}(\Pi)$

ε_0 : la permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} F \cdot m^{-1}$

Exemple:

atome H $q = +e$ (proton)

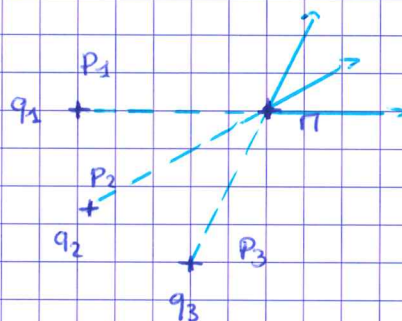
l'électron subit $\vec{F} = -e\vec{E}$ avec $P\Pi = a_0$ (rayon de Bohr)

$$|\vec{E}| = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{1}{a_0^2} \approx 5 \cdot 10^{11} V \cdot m^{-1}$$

3. Champ créé par une distribution de charge

♥ Principe de superposition: cf. poly

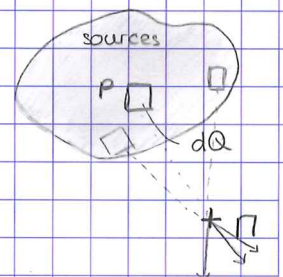
$$\vec{E}(\Pi) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_{P_1\Pi}}{P_1\Pi^2} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_{P_2\Pi}}{P_2\Pi^2} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_{P_3\Pi}}{P_3\Pi^2}$$



Pour une distribution continue de charges:

$$d\vec{E}(\Pi) = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_{P\Pi}}{P\Pi^2}$$

$$\vec{E}(\Pi) = \int_{\text{sources}} d\vec{E}(\Pi)$$



calcul pénible que notre programme proscriit.

2.

4. Transformation et invariance d'un système physique

- Transformation d'un système physique : cf. poly
- Invariance d'un champ par une transformation : cf. poly

5. Invariances des sources et propriétés du champ.

En analysant les propriétés d'invariance des sources on peut en déduire des conséquences sur les champs.

(principe de Curie)

a. Invariance par translation

cf. Figure 18

Si les sources sont invariantes dans une translation, le champ qu'elles créent l'est aussi.

Si les sources sont invariantes par toutes translations (ici selon $\vec{u}_z$), et en est de même pour le champ.

↳ $\vec{E}(x, y, z)$ ne dépend pas de z : $\vec{E}(x, y)$

b. Invariance par rotation

cf. Figure 19

Coordonnées cylindriques : $\Pi(r, \theta, z)$

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, z) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + E_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

Si les sources du champs (charges) sont invariantes par toute rotation autour de Oz , les composantes du champ ne dépendent pas de θ : $\vec{E} = E_r(r, z) \vec{u}_r + E_\theta(r, z) \vec{u}_\theta + E_z(r, z) \vec{u}_z$

c. Invariance par symétrie plane

cf. Figure 20

Soient des sources possédant un plan de symétrie Π , soit Π' le symétrique de Π . Alors :

$$\bullet \vec{E}(\Pi') = S_{\Pi}(\vec{E}(\Pi))$$

← symétrique par rapport à Π

corollaire :

$$\bullet \text{ si } N \in \Pi, \vec{E}(N) \subset \Pi$$

d. Anti-invariance par symétrie plane

cf. Figure 21

On dit que Π est un plan d'antisymétrie des sources si la symétrie plane revient à multiplier partout les charges par -1 .

Dans ce cas

$$\bullet \vec{E}(\Pi') = -S_{\Pi}(\vec{E}(\Pi))$$

corollaire :

$$\bullet \text{ si } N \in \Pi, \vec{E}(N) \perp \Pi$$

Quand on cherche un champ à partir de ses sources, on commence **TOUTOURS** par analyser les propriétés d'invariance et symétrie plane.

1. Potentiel créé par une charge ponctuelle

Remarque :

coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\vec{ur}}{r^2} = - \frac{\vec{u}_{on}}{on^2}$$

$$\vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{pn} \right) = - \frac{\vec{u}_{pn}}{pn^2}$$

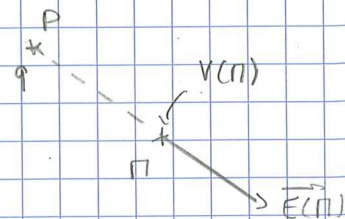
$$\vec{E}(n) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{pn}}{pn^2} = - \vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{pn} \right)$$

$$V(n) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{pn}$$

$$\vec{E}(n) = - \vec{\text{grad}} (V(n))$$

en $[V \cdot m^{-1}]$

↳ potentiel électrostatique
créé par une charge
en $[V]$



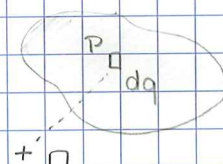
2. Potentiel créé par une distribution de charges

Par le principe de superposition et par linéarité d'un gradient, on peut écrire pour un ensemble de charges :

$$\vec{E}(n) = - \vec{\text{grad}} (V(n)) \quad \text{avec} \quad V(n) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{in}}$$

Pour une distribution continue de charges :

$$V(n) = \int_{\text{sources}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 pn}$$



Exemple : cf. Figure 1

But : calculer $\vec{E}$ sur l'axe Oz

Tout plan contenant la droite On est un plan de symétrie des sources,

$\vec{E}(n)$ est inclus dans ce plan donc $\vec{E}(n) = E \vec{u}_z$

sur l'axe $(E = E(z))$

$$\begin{aligned}
 V(r) &= \int_{\text{cercle}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2+z^2}} \int dq \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} Q
 \end{aligned}$$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{2z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

Le plan du cercle est un plan de symétrie des sources

$$\vec{E}(-z) = S_{\pi}(\vec{E}(z))$$

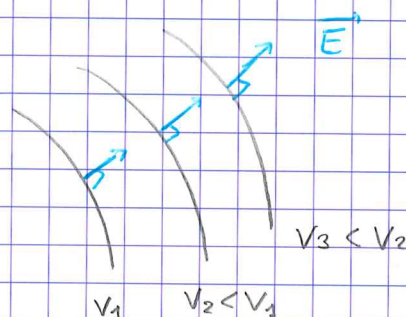
$$\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$$

ce qui confirme l'impairité de $\vec{E}$.

3. Du potentiel au champ.

$$\vec{E}(r) = -\text{grad}(V(r))$$

$\vec{E}$ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles, dirigé vers les potentiels décroissants.



→ V est continu dans l'espace (fournit une CB)

Le potentiel suit les règles d'invariance simples

cf. Figure 2

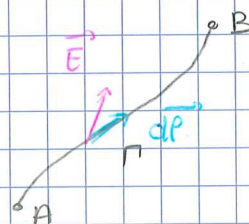
4. Circulation du champ électrique

4.

a. Diminution du potentiel

$$\begin{aligned}\int_{A, \gamma}^B \vec{E}(\gamma) \cdot d\vec{\ell} &= \int_{A, \gamma}^B -\text{grad } V \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_{A, \gamma}^B -dV\end{aligned}$$

par def
du grad



$$= -V(B) + V(A)$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V(A) - V(B)$$

La circulation du champ électrique est la diminution du potentiel (départ - arrivée). Elle ne dépend pas de la courbe suivie de A jusqu'à B.

Cas particulier:

* Si γ est une lde

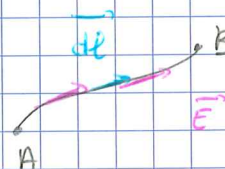
ligne de
champ

$$\vec{E} \parallel d\vec{\ell}$$

$$V(A) - V(B) = \int_A^B E d\ell = \ell_{AB} E_{\text{moy}}$$

$$[V \cdot m^{-1}] \quad E_{\text{moy}} = \frac{V(A) - V(B)}{\ell_{AB}} \quad \begin{matrix} [V] \\ [m] \end{matrix}$$

longueur de l'arc



exemple cf. Figure 2

$$\text{entre A et B : } E_{\text{moy}} = \frac{20 \text{ V}}{0,5 \times 10^{-2}} = 4 \text{ kV/m}$$

b. Travail de la force électrique

q une charge qui subit $\vec{E}$ ($\neq$ source)

$$\vec{F}(n) = q\vec{E}(n) = -q \vec{\text{grad}} V(n)$$

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{F}(n) \cdot d\vec{on} \\ &= -q \vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{on} \\ &= -q dV \\ &= -d(qV)\end{aligned}$$

$$\delta W = -d\mathcal{E}_p \text{ avec } \mathcal{E}_p(n) = qV(n)$$

Dans les mouvements d'une charge dans un champ $\vec{E}$ penser au TEN.

cf. Figure 3

On cherche la vitesse de l'électron quand et atteint le grillage qui l'attire.

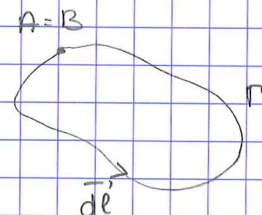
$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m(t=0) &= \mathcal{E}_m(t_f) \\ \frac{1}{2} m \cdot 0^2 - eV(0) &= \frac{1}{2} m v_f^2 - eU \\ v_f &= \sqrt{\frac{2eU}{m}}\end{aligned}$$

c. Cas d'un contour fermé

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{el} = V(A) - V(B) = 0$$

$$\forall \Gamma \text{ fermée, } \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{el} = 0$$

La circulation de $\vec{E}$ est conservative



En conséquence, il n'existe pas de lignes de champ électrostatiques qui se referment.

5.

démo par l'absurde :

Soit Γ une l.c. fermée

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{P} = \int_{\Gamma} E dl > 0 \quad \text{impossible à cause du point précédent}$$

Par analogie avec la méca flu n'a pas de vorticité.

5. Formulation locale

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \text{rot } (-\text{grad } V) \\ &= -\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} V) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

rot grad est
tjrs nul !

$$\forall n, \text{rot } (\vec{E}(n)) = \vec{0}$$

On passe de $\text{rot } (\vec{E}(n)) = \vec{0}$ à $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{P} = 0$ par la formule de Stokes.

III- Flux de $\vec{E}$

1. Flux émis par une charge ponctuelle

cf. Figure 4 (gauche)

$$* q \text{ crée } \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{ur}}{r^2}$$

A travers S de la sphère :

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{ur}}{r^2} \cdot dS \vec{ur} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int dS \end{aligned}$$

démo pas à savoir mais aide à comprendre

avec $\int dS = 4\pi r^2$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

origine

* En dehors de 0, on a :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E)$$

$$r^2 E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

En dehors de la charge, le flux de $\vec{E}$ est conservatif.

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

cf. Figure 4 (droite)

Σ ne contient pas q . Là où la charge se trouve $\vec{E}$ est à flux conservatif donc $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$

2. Théorème de Gauss

Théorème de Gauss, cf. Poly encadré

démonstration : c'est une conséquence de 1) et du principe de superposition.

charges ponctuelles : $Q_{\text{int}} = \sum_{i \text{ int}} q_i$

charges volumiques : $Q_{\text{int}} = \int_{\text{volume limité par } \Sigma} \rho \, dV$ cf. Figure 5

3. Calcul du champ par le théorème de Gauss

↳ Méthode privilégiée pour calculer $\vec{E}$ dans notre programme

1. On trouve la direction du champ par l'analyse des symétries

on choisit une surface dont la normale soit $\vec{E}$

2. On choisit habilement une surface pour appliquer le théorème de Gauss

• cf. Figure 6

des plans $(\Pi, \vec{u}_z, \vec{u}_x)$ et $(\Pi, \vec{u}_z, \vec{u}_y)$ sont des plans de symétrie des sources, ils contiennent $\vec{E}(\Pi)$

$$\vec{E} = E(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

Il y a invariance par rotation autour de Oz et translation selon $\vec{u}_z$, donc $\vec{E} = E(r) \vec{u}_z$

On applique le théorème de Gauss au cylindre d'axe Oz et passant par Π de surface S . (côté, dessus et dessous)

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_{\text{côté}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{dessus}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{dessous}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\text{côté}} E(r) dS + 0 + 0 \\ &= E(r) 2\pi r h \end{aligned}$$

↳ sur le dessus et le dessous le flux est nul car $\vec{E} \perp d\vec{S}$

$$Q_{\text{int}} = \lambda h$$

$$\text{Gauss : } 2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

un potentiel est déf à une cste près

$$\vec{E} = -\text{grad } V : E = -\frac{dV}{dr}$$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + C$$

• cf. Figure 7

Tout plan contenant $(\Pi, \vec{u}_\Pi)$ est un plan de symétrie des sources et contient $\vec{E}(\Pi)$.

$$\text{Donc } \vec{E}(\Pi) = E(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\Pi$$

A cause des invariances par rotation $\vec{E}$ ne dépend ni de θ ni de φ donc $\vec{E}(\Pi) = E(r) \vec{u}_\Pi$

On applique le théorème de Gauss à la sphère S de centre O passant par Π .

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_S E(r) \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \vec{u}_r \\ &= E(r) \times 4\pi r^2 \end{aligned}$$

* si $r \geq R$

$$Q_{\text{int}} = e \times \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\text{— Gauss : } E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{e}{3} \frac{4\pi R^3}{\epsilon_0}$$

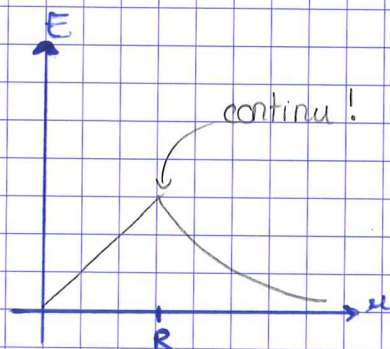
$$E(r) = \frac{eR^3}{3r^2\epsilon_0}$$

* si $r \leq R$

$$Q_{\text{int}} = e \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\text{— Gauss : } E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{e}{3} \frac{4\pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{er}{3\epsilon_0}$$



A Retenir :

$\vec{E}$ est continu, sauf en des points particuliers où existeraient des charges linéiques, surfaciques ou ponctuelles.

→ calcul de V

$$E = -\frac{dV}{dr}$$

$$* \text{ si } r \geq R : V = \frac{ER^3}{3\epsilon_0 r} + \text{cte}$$

↳ on choisit l'origine des potentiels à l'infini

$$Q_{\text{boule}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

cf VI.1

$$\text{donc } V = \frac{Q_{\text{boule}}}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \leftarrow \text{comme si toute la charge était placée à l'origine}$$

$$* \text{ si } r \leq R : V = -\frac{Er^2}{6\epsilon_0} + D \quad \leftarrow \text{cte}$$

par continuité, il faut :

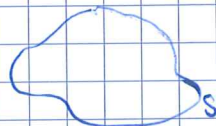
$$-\frac{ER^2}{6\epsilon_0} + D = \frac{ER^3}{3\epsilon_0 R}$$

$$D = \frac{ER^2}{2\epsilon_0}$$

4. Flux et topographie du champ électrique

* région neutre

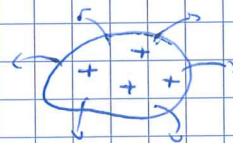
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0$$



$\vec{E}$ est à flux conservatif dans les zones neutres.

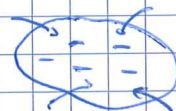
* région chargée $\oplus$

$$Q_{\text{int}} > 0 \quad \text{donc} \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} > 0$$



* région chargée $\ominus$

$$Q_{\text{int}} < 0 \quad \text{donc} \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} < 0$$



Le champ $\vec{E}$ jaillit des charges $\oplus$ et s'enfouit dans les charges $\ominus$.

cf. Figure 8

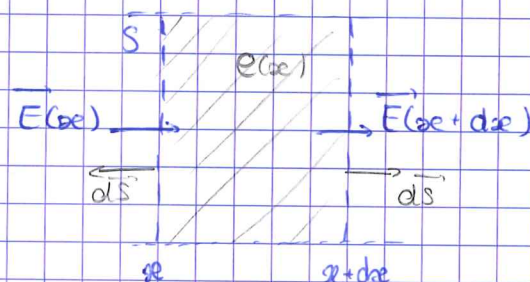
5. Equation de Maxwell - Gauss

cas 1d

On ne considère que des charges volumiques

$$\vec{E} = E(x) \vec{u}_x$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(x+dx)S - E(x)S \\ = S(E(x+dx) - E(x))$$



$$Q_{int} = dx S \rho(x)$$

$$\text{Gauss: } S(E(x+dx) - E(x)) = \frac{dx S \rho(x)}{\epsilon_0}$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$$

on évalue le membre de gauche
et celui de droite au même point

cas 3d

on obtient

$$\text{div } \vec{E}(r) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

équation de
Maxwell - Gauss

C'est l'expression locale du théorème de Gauss.

Connaissant ρ elle permet de trouver $\vec{E}$

Inversement, connaissant $\vec{E}$ on peut trouver sa source ρ

Dans certains cas on cherche $\vec{E}$ et ρ simultanément avec un contexte particulier.

exemple 1: refaire le paragraphe 3.) tout cf. Figure 7

div $\vec{E}$
en sphérique

$$\text{ou: } \vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

$$\forall r, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

$$\text{avec si } r \leq R : \rho(r) = \rho$$

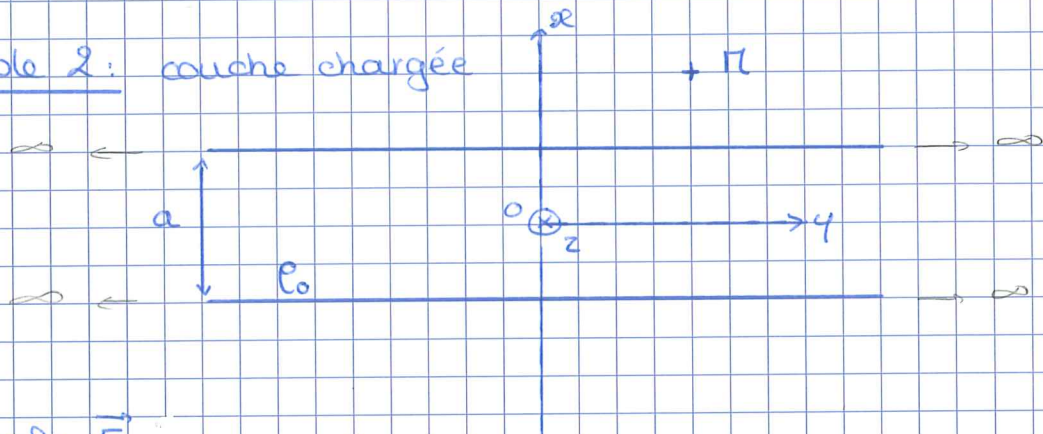
$$\text{si } r \geq R : \rho(r) = 0$$

On intègre sur chaque intervalle et on les raccorde par continuité

$$\text{CB: } E(0) = 0$$

A faire

exemple 2: couche chargée



On cherche $\vec{E}$

des plans $(\Pi, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $(\Pi, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie des sources, ils contiennent $\vec{E}(\Pi)$

donc $\vec{E}(\Pi) = E(x, y, z) \vec{u}_x$.

Il y a invariance par translation selon $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ et

finallement $\vec{E}(\Pi) = E(x) \vec{u}_x$

L'équation de Maxwell - Gauss s'écrit : $\forall x, \frac{dE}{dx} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$

$$\bullet \quad -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \quad \text{donc} \quad E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x + \text{cte}$$

Le plan $(O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie des sources, pour $x=0$

$\vec{E}$ est inclus dans ce plan donc $E(0)=0$ donc $\text{cte} = 0$

$$\bullet \quad x \leq -\frac{a}{2} \quad \rho(x) = 0$$

$$\frac{dE}{dx} = 0 \quad \text{donc} \quad E = \text{cte}'$$

$$\text{or } F(-\frac{a}{2}) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{a}{2} \quad \text{donc} \quad \text{cte}' = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{a}{2}$$

$$x > \frac{a}{2}$$

$$\text{idem } E = \frac{e}{\epsilon_0} \times \frac{a}{2}$$

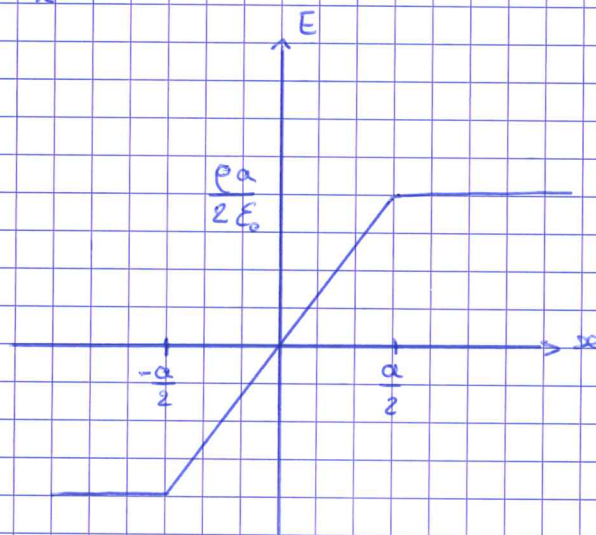
On peut reprendre

cet exercice par le

théorème de Gauss

$$\text{Calculer } V : E(x) = -\frac{dV}{dx}$$

en raccordant les intervalles par continuité.



6. Equations de Poisson et de Laplace

$$\text{PG : } \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{div } (-\text{grad } V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\forall n, \quad \Delta V(n) + \frac{\rho(n)}{\epsilon_0} = 0$$

équation de Poisson

↳ même utilisation que PG

Cas particulier : dans une zone neutre (non chargée) : $\rho = 0$

$$\Delta V = 0$$

équation de Laplace

exercice : cf. figure 9

Sous l'effet de $\vec{E}_0$ les électrons libres de la boule se déplacent et s'accumulent en surface, ce qui modifie le champ autour de la boule
→ nous le cherchons.

$$\Pi(x, \theta, \varphi)$$

$$\text{Pour } x > R, \quad \Delta V = 0$$

A cause de l'invariance par rotation autour de l'axe $(O, \vec{u}_z)$
 la coordonnée φ n'intervient pas

• A résoudre : $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)$

• CB : * $r = R$, $V = 0$ boule reliée à la Terre.

* $r \rightarrow \infty$, $\vec{E} \rightarrow E_0 \vec{u}_z$
 $V \sim -E_0 z = -E_0 r \cos(\theta)$ $E = -\text{grad } V$

cela rappelle le problème de la boule en mécanique fluide mais la CB en $r = R$ n'est pas la même.

on fait ref à ça dans IV, 3.

ici, la solution est : $V = E_0 \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right) \cos \theta$

$\vec{E} = -\text{grad } V$
 $= -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$
 $= E_0 \left(\frac{2R^3}{r^3} + 1 \right) \cos \theta \vec{u}_r + E_0 \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) \sin \theta \vec{u}_\theta$

Trouvons maintenant la charge surfacique de la boule

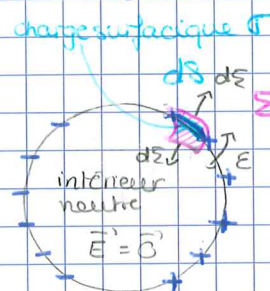
$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = 0 + \int \vec{E} \left(R + \frac{\epsilon}{2} \right) \cdot d\vec{\Sigma} \vec{u}_r + \Phi_{\text{lat}}$
dans le métal en dehors

$\epsilon \rightarrow 0$, $\Phi_{\text{lat}} \rightarrow 0$

$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} \rightarrow 3 E_0 \cos \theta dS$

$Q_{\text{int}} = \sigma dS$

Gauss : $3 E_0 \cos \theta dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma = 3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta$



Σ est une surface fermée.

la boule est polarisée. (pôle - et pôle +)

exo 5/2 : Exprimer $\vec{p}$? (moment dipolaire)

IV - Propriétés des dipôles électriques

1. Définitions

Dipôle électrique : cf. Poly

exemple : pour la boule précédente, on peut calculer $\vec{P} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$

Avec les dipôles, on utilise souvent l'approximation dipolaire :

$a = A_- A_+$, (taille du dipôle)

$a \ll$ toute autre longueur

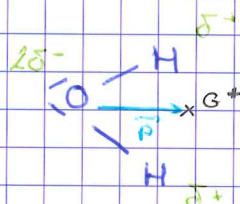
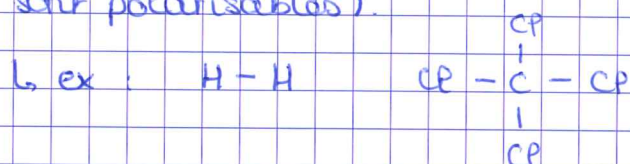
2. Moment dipolaires des molécules

Les molécules polaires sont des dipôles.

$$p = 3,6 \times 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$$



D'autres molécules acquièrent un moment dipolaire lorsqu'on les soumet à $\vec{E}$ (elles sont polarisables).



$$p = 6,2 \times 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$$

Sous l'effet de $\vec{E}$, les nuages électroniques sont tirés dans un sens et les noyaux positifs dans l'autre sens d'où la polarisation.

On pose $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ (α la polarisabilité) ou $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \alpha' \vec{E}$

α' s'appelle la polarisabilité de volume (liée au volume du nuage électronique).

Analyse dimensionnelle :

$$[\vec{p}] = \text{C}\cdot\text{m}$$

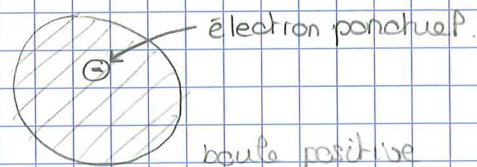
$$[E] = \frac{\text{C}}{[\epsilon_0] \text{m}^2}$$

$$[\epsilon_0 E] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \text{ donc } [\alpha'] = \text{m}^3,$$

c'est un volume !

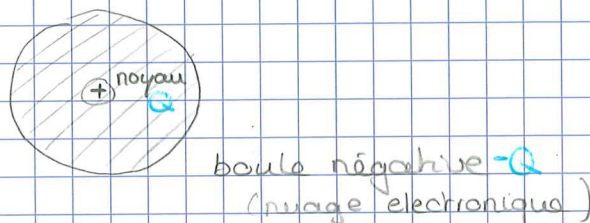
On peut exprimer α' dans le modèle de Thomson

pour Thomson : atome =



Ce modèle est archaïque, préférons lui le modèle de Thomson inversé (i.e. le modèle de Thomson et -Damps)

cf. Figure 10



- au repos $G_- = G_+$ donc $\vec{p} = \vec{0}$
- le champ $\vec{E}$ appliqué exerce des forces antagonistes qui séparent G_- et G_+
- les $\ominus$ et les $\oplus$ s'attirent, ce qui va limiter la dissociation provoquée par $\vec{E}$.

à l'équilibre: $\vec{F}_{\text{proton}/e^-} + \vec{F}_{\vec{E}/e^-} = \vec{0}$

en cherchant d'abord $\vec{F}_{e^-/\text{proton}}$:

les p^+ subissent $\vec{F}_{e^-/\text{proton}} = Q \vec{E}_{e^-}$

celui crée par les e^- et pas celui app. au départ.

or $\vec{E}_{e^-} = \frac{-Q}{4\pi R^3} \frac{\vec{OG}}{3\epsilon_0}$

cf. III.3. boule $r \leq R$

$\vec{E}_{e^-}(G_+) = \frac{-Q}{4\pi R^3} \frac{\vec{OG}_+}{3\epsilon_0}$

$\frac{Q \vec{r}}{3\epsilon_0} = \vec{0}$

$\vec{F}_{e^-/\text{proton}} = \frac{-Q^2}{4\pi R^3 \epsilon_0} \vec{OG}_+ \Rightarrow \vec{F}_{\text{proton}/e^-} = \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 R^3} \vec{OG}_+$

à l'équilibre:

$\frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 R^3} \vec{OG}_+ - Q \vec{E} = \vec{0}$

$Q \vec{OG}_+ = 4\pi \epsilon_0 R^3 \vec{E}$

$\vec{p} = 4\pi \epsilon_0 R^3 \vec{E}$

on identifie $\alpha' = R^3$

3. Potentiel et champ créés par un dipôle électrostatique

cf. Figure 11

Le plan (A^-, A^+, Π) est un plan de symétrie des sources, et contient

$$\vec{E}(\Pi) = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\theta$$

Par superposition :

$$V(\Pi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{A^+\Pi} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{A^-\Pi}$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{A^+\Pi} - \frac{1}{A^-\Pi} \right)$$

$$\overrightarrow{A^+\Pi} = \overrightarrow{A^+O} + \overrightarrow{O\Pi} = -\frac{a}{2} \vec{u}_z + r \vec{u}_r$$

$$A^+\Pi^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} r \vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = \frac{a^2}{4} + r^2 - ar \cos \theta$$

approximation dipolaire : $a \ll r$, $\frac{a}{r} \ll 1$

$$A^+\Pi^2 = r^2 \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)$$

$$\frac{1}{A^+\Pi} = (A^+\Pi^2)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-1/2}$$

$$\frac{1}{A^+\Pi} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{a}{r} \cos \theta \right) \right)$$

$$\frac{1}{A^+\Pi} \approx \frac{1}{r} + \frac{a}{2r^2} \cos \theta$$

$$\frac{1}{A^-\Pi} \approx \frac{1}{r} - \frac{a}{2r^2} \cos \theta$$

$$V(\Pi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r^2} \cos \theta$$

$$V(\Pi) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$
$$= \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta \right)$$

$$\vec{E} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

$\vec{E}$ décroît en $\frac{1}{r^3}$: plus rapide que pour une charge ponctuelle (effet de compensation)

cf. Figure 12 : lignes de champ

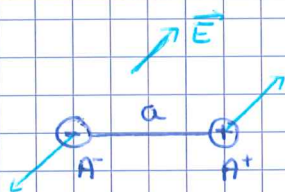
À on croit voir des boucles mais la formule ne convient pas tout près du dipôle.

Tout près, l'allure serait celle de la Figure 13

Dans III, 6 (exercice) : on reconnaît un terme dipolaire et on identifie $\frac{p}{4\pi\epsilon_0} = \epsilon_0 R^3$ donc $p = \epsilon_0 R^3 4\pi\epsilon_0$

4. Actions subies par un dipôle plongé dans un champ extérieur

a. Résultante des forces



$$\vec{F} = q\vec{E}(A+) - q\vec{E}(A-) = q(\vec{E}(A+) - \vec{E}(A-))$$

Dans un champ uniforme, $\vec{E}(A+) = \vec{E}(A-)$: $\vec{F} = \vec{0}$

Si une force existe.

$$F_x = q(E_x(A+) - E_x(A-))$$

$a \ll$ distance de variation de E_x

$$E_x(A+) - E_x(A-) \simeq dE_x$$

$$\simeq \overrightarrow{\text{grad}} E_x \cdot \overrightarrow{A- A+}$$

$$F_x = q \overrightarrow{A- A+} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} E_x$$

$$F_x = \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} E_x$$

$$F_y = \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} E_y$$

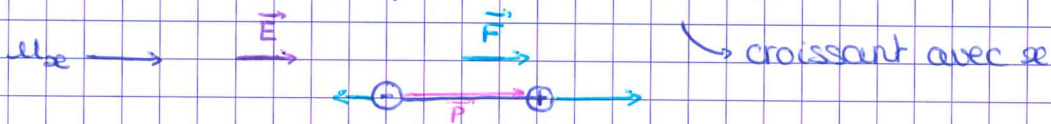
$$F_z = \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} E_z$$

idem pour y et z

$$\Rightarrow \vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

conséquences:

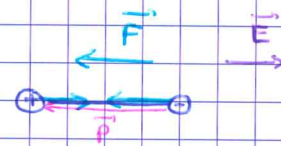
ici pour simplifier : $\vec{E} = E_x \vec{u}_x$



$$\vec{p} = p \vec{u}_x$$

$$F_x = p \frac{\partial}{\partial x} E_x$$

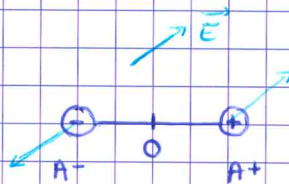
autre cas :



Selon l'orientation de $\vec{p}$, la force est dirigée dans le sens de croissance de E ou en sens inverse.

b. Moment des forces en O

ici pas l'origine
mais le milieu
du dipôle



des forces électriques exercent un couple :

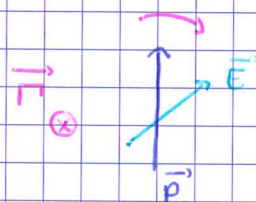
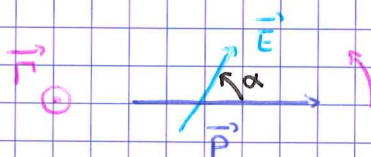
$$\vec{\Gamma}_O = \vec{OA}^+ \wedge -q \vec{E}(A^+) + \vec{OA}^- \wedge (-q \vec{E}(A^-))$$

$$\text{or } \vec{OA}^- = -\vec{OA}^+$$

$$\text{donc } \vec{\Gamma}_O = q \vec{OA}^+ (\vec{E}(A^+) + \vec{E}(A^-))$$
$$\approx q \vec{OA}^+ \wedge 2 \vec{E}(O)$$

$$\text{or } 2 \vec{OA}^+ = \vec{A}^- \vec{A}^+$$

$$\text{donc } \vec{\Gamma}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}(O)$$



Ce couple tend à aligner le champ sur le dipôle

Une fois aligné, le dipôle subit une force dirigée vers la région où le champ augmente

c. Energie potentielle

12.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p &= -qV(A^+) - qV(A^-) \\ &= -q(V(A^+) - V(A^-))\end{aligned}$$

$a \ll \dots$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p &= -q \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \overrightarrow{A^- A^+} \\ &= -q \vec{E} \cdot \overrightarrow{A^- A^+}\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}(O)$$

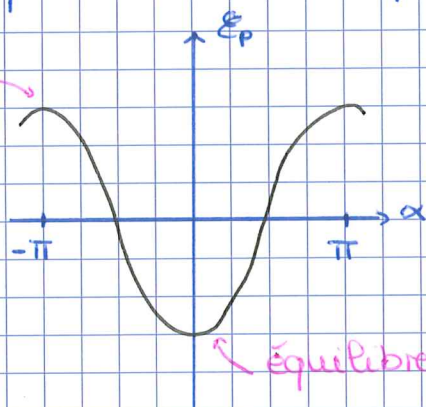
dipôle



ne marche que pour un dipôle rigide (non déformable)

en se prenant les schémas précédents : $\mathcal{E}_p = -p E \cos(\alpha)$

équilibre instable



On retrouve la tendance à l'orientation.

On peut aussi utiliser $\mathcal{E}_p$ pour trouver la force :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E})$$

noté O précédemment

dépend de O où se trouve le dipôle

Analyse vectorielle :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} + \vec{p} \wedge \text{rot}(\vec{E})$$

on retrouve la formule générale.

5. Interaction ion-dipôle

$$Q > 0$$

cette charge crée $\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$

le dipôle s'oriente $\varphi = 0$

Une fois orienté, le dipôle est attiré par le cation.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \\ &= \vec{\text{grad}}\left(\frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) \\ &= \frac{pQ}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{(-2)}{r^3} \vec{u}_r\end{aligned}$$

$$\varphi = \pi$$

Pour un anion, Q est négatif mais le dipôle s'oriente dans l'autre sens et la force reste attractive.

Ceci est lié à la solvation des cations dans un solvant polaire.

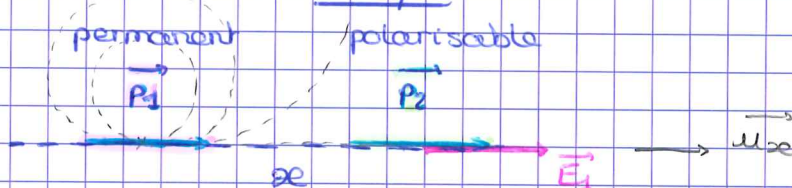
6. Interactions dipôle-dipôle (forces de Van der Waals)

→ 3 types :

- Keesom : 2 molécules polaires (moment permanent)
- Debye : 1 molécule polaire, 1 molécule polarisable
- London : 2 molécules polarisables.

Dans les 3 cas, $\epsilon_p \propto \frac{1}{r^6}$ et $F \propto \frac{1}{r^7}$

Nous traitons le cas Debye :



$$\vec{p}_1 \text{ crée } \vec{E}_1 = \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times (2 \cos(0) \vec{u}_{r1} + \sin(0) \vec{u}_{\theta 1}) = \frac{p_1}{2\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_{r1}$$

$$\vec{p}_2 = \alpha \vec{E}_1$$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (\vec{p}_2 \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_1 \\ &= p_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_1}{2\pi\epsilon_0 x^3} \vec{u}_x \right) \\ &= p_2 \times \frac{-3p_1}{2\pi\epsilon_0 x^4} \vec{u}_x\end{aligned}$$

$$\text{or } p_2 = \alpha E_1$$

$$\text{donc } \vec{F} = \frac{-\alpha p_1^2 \textcircled{3}}{(2\pi\epsilon_0)^2} \times \frac{1}{x^7} \vec{u}_x$$

$$\begin{aligned}\text{Essayons } \vec{F} &= \text{grad}(\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1) : \\ &= \text{grad}(\alpha E_1^2) \\ &= \text{grad} \left(\alpha \frac{p_1^2}{(2\pi\epsilon_0)^2 x^6} \right) \\ &= \frac{-\textcircled{6} \alpha p_1^2}{(2\pi\epsilon_0)^2 x^7} \vec{u}_x\end{aligned}$$

⇒ résultat FAUX

car le dipôle n'est

pas rigide (il y a une molécule polarisable)

Amusement: on s'amuse comme on peut...

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (\vec{p}_2 \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_1 \\ &= (\alpha \vec{E}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_1 \\ &= \alpha \left(\frac{1}{2} \text{grad } E_1^2 - \vec{E}_1 \wedge \text{rot } \vec{E}_1 \right) \\ &= \text{grad} \left(\frac{\alpha \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1}{2} \right) \\ &= \text{grad} \left(\frac{1}{2} \vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 \right)\end{aligned}$$

⇒ donnerait le bon résultat, explique le 6 au lieu du 3.

Un mot sur Keesom:

$$\vec{F} = \underbrace{\vec{\nabla}}_{\text{cste}} (\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1) \propto -\frac{1}{x^4} \quad \text{contradictoire avec } \frac{1}{x^7}$$

A cause de l'agitation thermique, l'orientation des dipôles varie, les forces sont tantôt attractives, tantôt répulsives et un calcul statistique mène au $\frac{1}{x^7}$.

V - Condensateur plan

1. Modélisation et calcul des champs

Il est formé de 2 plaques métalliques en regard portant des charges opposées.

On s'intéresse à un modèle plan.

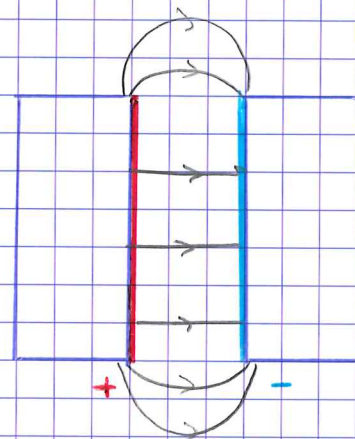
On suppose les plaques infinies, on néglige les effets de bords

cf. Figure 15

On calcule le champ par superposition.

cf. Figure 16

↳ seulement les charges de gauche de la Figure 15 (+)



Le plan $(\Pi, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $(\Pi, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ sont plans de symétrie des sources, ils contiennent $\vec{E}(\Pi)$ donc $\vec{E}(\Pi) = E(x, y, z) \vec{u}_x$ et invariances par translation donc $\vec{E}(\Pi) = E(x) \vec{u}_x$

Le plan $(O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est aussi plan de symétrie des sources donc $\vec{E}(-x) = S(\vec{E}(x))$

$$\vec{E}(-x) = -\vec{E}(x)$$

Pour $x > 0$, th de Gauss à Σ

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} &= SE(x) + E(-x)\vec{u}_x \cdot S(-\vec{u}_x) \\ &= SE(x) - E(x) \times (-S) \\ &= 2E(x)S \end{aligned}$$

$$Q_{\text{int}} = \sigma S$$

$$\text{Gauss: } 2E(x)S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (x > 0)$$

(à droite de la zone chargée)

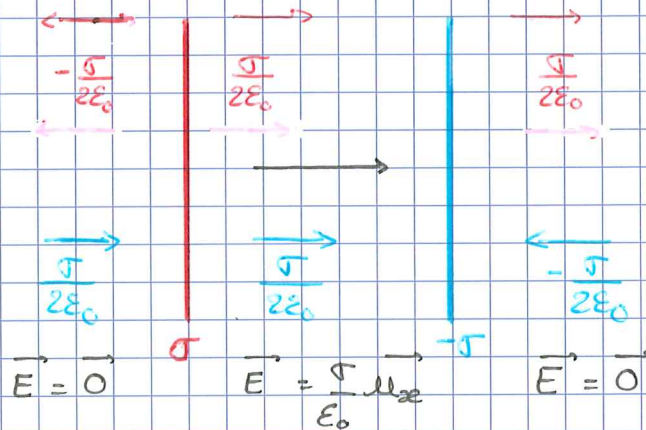
$$E(x) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (x < 0)$$

(à gauche de la zone chargée)

Pour le condensateur entier, on superpose :

14.

le champ jaillit
du $\oplus$ et s'engouffre
dans le $\ominus$



pour la plaque de droite
m même formule mais on
remplace σ par $-\sigma$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

Remarque : le champ subit une
discontinuité en traversant les charges
surfaiques

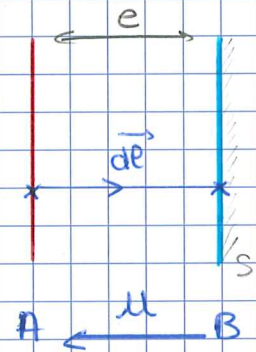
2. Capacité du condensateur plan

$$Q = C U \quad U = V_A - V_B$$

↑
[Farad]

En général C dépend de la taille et de la forme du condensateur.

$$\begin{aligned} U = V_A - V_B &= \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_A^B E d\ell \\ &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} e \end{aligned}$$



$$\sigma = \frac{\epsilon_0 U}{e}$$

$$Q = S \sigma = \frac{\epsilon_0 S U}{e}$$



$$\Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

S surface d'une plaque

ϵ_0 [F·m⁻¹]

AN : $S = 100 \text{ cm}^2$

$e = 1 \text{ mm}$

$$C = \frac{8,85 \times 10^{-12} \times 100 \times 10^{-4}}{10^{-3}} = 8,85 \times 10^{-11} \text{ F} = 0,885 \text{ nF}$$

en TP : $C = 10 \text{ nF}$ ou $C = 100 \text{ nF}$

Pour obtenir des valeurs plus élevées on peut diminuer e :

• $e \rightarrow$ or $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{u}{e}$ Δ le champ devient très fort!

Δ au claquage du condensateur

on peut aussi remplacer l'air par un diélectrique (= isolant)

• $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon > \epsilon_0$

on peut aussi augmenter S en enroulant ou repliant le condensateur.

3. Énergie du condensateur plan

Un condensateur chargé stocke de l'énergie:

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} Q u = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Truc faux:

A partir de $\mathcal{E}_p = qV$: $\mathcal{E}_e = QV_A - QV_B$

$$= Q(V_A - V_B)$$

$$= Q u \quad \text{zut !!}$$

$\mathcal{E}_p = qV$ ne s'applique pas car les charges sont plongées dans leur propre champ.

Bonne démo:

ici on peut utiliser $\mathcal{E}_p = qV$
car les charges sont amenées
dans un champ c'est pas elles
qui le créent. V_p existait avant.
 $dq = i dt$

$$d\mathcal{E} = dq V_A - dq V_B$$

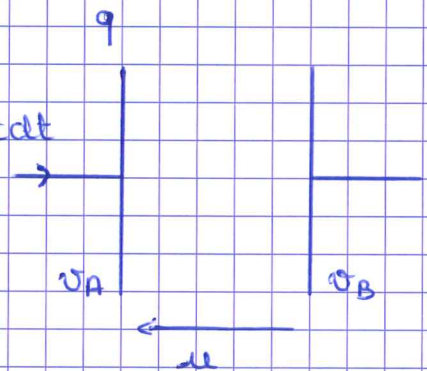
$$= dq (V_A - V_B)$$

$$= dq u \quad (= i dt \times u)$$

or $q = Cu$

donc $d\mathcal{E} = Cu du$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C u^2$$



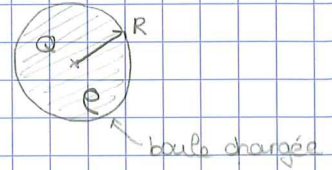
$q: 0 \rightarrow Q$

$u: 0 \rightarrow u$

Énergie: $0 \rightarrow \mathcal{E}$

1. Energie électrostatique des noyaux atomiques

Comme les charges se repoussent, cette boule possède un stock d'énergie.



cf. Figure 17

Rq: $\frac{5}{2}$ $E_e = \int_{\text{espace}} u_e d\tau$

$u_e = \epsilon_0 \frac{E^2}{2}$

On calcule E_e en imaginant la constitution progressive de la boule

$x: 0 \rightarrow R$

$q: 0 \rightarrow Q$

(1) $Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$

(2) $q = \frac{4}{3} \pi x^3 \rho$

(2)

(1)

$\frac{q}{Q} = \frac{x^3}{R^3}$

ou $q = Q \frac{x^3}{R^3}$ ou $x = R \left(\frac{q}{Q} \right)^{1/3}$

Quand on amène dq , $dE = dq \times V$

← on amène des charges de l'infini qu'on vient poser sur la surface de la boule.

évalué à la surface de la boule de rayon x

$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$ cf. III 3)

$dE = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} dq$
 $= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R \left(\frac{q}{Q} \right)^{1/3}} dq$

$= \frac{Q^{1/3}}{4\pi\epsilon_0 R} q^{2/3} dq$

$E = \int_0^Q \frac{Q^{1/3}}{4\pi\epsilon_0 R} q^{2/3} dq$

$= \frac{Q^{1/3}}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{3}{5} Q^{5/3}$

$E = \frac{3}{20} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 R}$

→ qd on a une boule, vu de l'ext c'est comme si la charge était ponctuelle.
justif = Gauss.

Application:

Un noyau atomique possède une charge $Q = Ze$

Dans un noyau:

• A nucléons

$$V \propto A$$

$$\text{or } V \propto R^3$$

$$\text{donc } R^3 \propto A$$

$$\text{donc } R \propto A^{1/3}$$

$$\text{On pose } R = r_0 A^{1/3}$$

↪ rayon d'un nucléon

$$r_0 = 1,1 \text{ fm}$$

L'énergie électrostatique du noyau est;

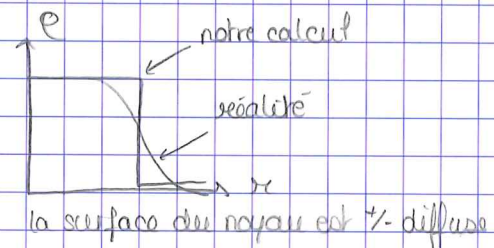
$$E_e = \frac{3}{20} \frac{Z^2 e^2}{\pi \epsilon_0 r_0 A^{1/3}}$$

$$E_e = a_e \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

$$\text{AN: } a_e = 0,78 \text{ MeV}$$

La valeur expérimentale est de 0,7 MeV

Par ailleurs, les nucléons sont liés les uns aux autres par des interactions fortes.



2. Analogies concernant le champ gravitationnel

cf. Tableau

Application: calcul du champ à l'intérieur pour étudier l'applatissage de la Terre.