

I - Grandeurs décrivant les courants électriques

Dans un conducteur des porteurs de charges sont libres de se mouvoir

ex: des e^- dans un métal, des ions dans une solution aqueuse,

des e^- dans un plasma, des $e^-(\pi)$ dans le

Le courant électrique est un déplacement collectif de ces porteurs de charges.

A ne pas confondre avec l'agitation thermique: mouvement aléatoire
et $\langle \vec{v}_{\text{porteur}} \rangle = \vec{0}$.

1. Vecteur densité de courant

cf. Figure 1

Pendant dt ,

$$d^2Q = (\vec{j} \cdot d\vec{S}) dt$$

$$dI = \frac{d^2Q}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{j} : [A \cdot m^{-2}] \quad \Delta$$

"densité volumique de courant"

Pendant dt ,

les porteurs bougent de $\vec{v} dt$

les courants circulent dans un volume

et ceux qui traversent $d\vec{S}$ sont au nombre de : $\vec{v} dt \cdot d\vec{S} \times n$

$$d^2Q = \overset{\text{charge d'1 porteur}}{q} n \vec{v} dt \cdot d\vec{S}$$

$$\text{donc } \vec{j} = n q \vec{v}$$

→ vitesse moyenne

Si plusieurs types de porteurs coexistent, on ajoute leur contribution.

$$\text{ex: eau salée: } \vec{j} = n_{Na^+} e \vec{v}_{Na^+} + n_{Cl^-} (-e) \vec{v}_{Cl^-}$$

mini exo: cf. Figure 2 $\rightarrow$ fil de cuivre

$$I = 10 \text{ A} \quad S = 6 \text{ mm}^2$$

$\rightarrow$ trouver la vitesse des électrons v_{e^-} dans ce fil ?

Hypothèse: $\vec{j}$ uniforme sur la section

$$I = j S$$

$$j = \frac{I}{S} = \frac{10}{6 \times 10^{-6}} = 1,7 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$j = n_{e^-} (-e) v_{e^-}$$

$$v_{e^-} = \frac{-j}{n_{e^-} e} \quad \text{or} \quad n_{e^-} = \frac{\mu_{\text{Cu}} N_A}{\mu_{\text{Cu}}} \times 1 = 8,6 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$= \frac{-1,7 \times 10^6}{8,6 \times 10^{28} \times 1,6 \times 10^{-19}}$$

$$= -0,12 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$$

dans le cuivre :
1e⁻-libre

$\rightarrow$ pas très rapide

2. Conservation de la charge

cf. Figure 3 : bilan 1d

• dQ_{stock}

• dQ_{ech}

• dQ_{stock} = dQ_{ech}

A faire

$$\text{à 1d : } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

$$\text{cas 3d : } \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

3. Courants permanents et quasi-permanents

2.

Des courants permanents ou stationnaires sont tels que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
(des charges se déplacent mais il n'y a pas d'accumulation de charges).

Donc

$$\text{div } \vec{j} = 0$$

le flux de $\vec{j}$ se conserve

$$\oint_{\mathcal{G}} \vec{j} \cdot \vec{ds} = \oint_{\mathcal{G}} \underbrace{\text{div } \vec{j}}_{=0} d\mathcal{G} = 0$$

Conséquence :

1. $j_1 S_1 = j_2 S_2$

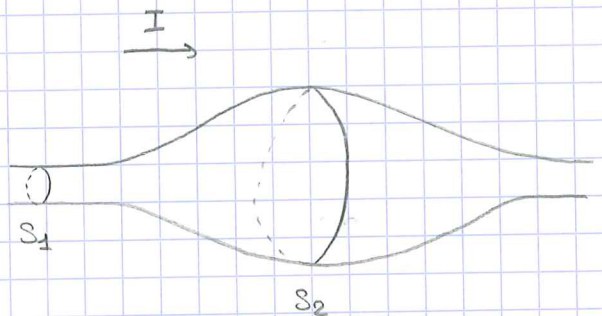
idem Figure 4

2. cf. Figure 5

$$\mathcal{G} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_{\text{ext}}$$

$$\oint_{\mathcal{G}} \vec{j} \cdot \vec{ds} = I_3 - I_1 - I_2$$

$$\oint_{\mathcal{G}} \vec{j} \cdot \vec{ds} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_3 = I_1 + I_2 \quad \text{loi des nœuds}$$



ARQS (ou ARQP) :

En régime variable, on postule souvent que $\vec{j}$ est à flux conservatif comme si le régime était permanent alors qu'il ne l'est pas, on utilise la loi des nœuds.

Cette approximation est l'ARQS.

En dehors des condensateurs, on néglige les accumulations de charges.

La justification de l'ARQS est délicate.

exo: cf. Figure 6

Hypothèse: $\vec{j}$ isotrope $\vec{j} = j(r) \vec{u}_r$

→ trouver $\vec{j}$?

$$\oint_{\gamma} \vec{j} \cdot d\vec{s} = j(r) \times 2\pi r^2 = I$$

dans l'ARQP: $\oint_{\gamma} \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0$

donc $\vec{j} = \frac{I}{2\pi r^2}$

fin de l'exemple
à la fin du cours

4. Puissance volumique reçue par les courants.

Un champ $\vec{E}$ agit sur les porteurs.

Sur 1 porteur, la puissance est: $q\vec{E} \cdot \vec{v}$

Dans $d\tau$, il y a $n d\tau$ porteurs

$$dP = n d\tau \times q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

$$dP = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

$$p = \frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad [W \cdot m^{-3}] \text{ puissance volumique}$$

Sur un volume V , $P = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$

Dans l'ARQP, on peut en déduire $P = UI$

II - Matériaux ohmiques

1. Loi d'Ohm locale et modèle de Drude

Les porteurs se meuvent sous l'effet d'un champ $\vec{E}$

Dans la plupart des matériaux,

conductivité électrique
[S · m⁻¹]

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}^+, \vec{j}(\vec{r}, t) = \gamma \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Loi d'Ohm
locale

$\frac{1}{\sigma}$: résistivité [$\Omega \cdot m$]

3. 4.

Les matériaux vérifiant cette condition sont des matériaux ohmiques.

En général, $\vec{E} = - \text{grad } V$

donc $\vec{j} = -\sigma \vec{\nabla} V$

loi phénoménologique qui rappelle celle de Fourier.

Modèle de Drude (heuristique)

cf. Figure 7

Les électrons libres se déplacent dans le réseau métallique.

Leurs collisions sur le réseau métallique sont représentées par

une force : $\vec{F} = -m \frac{\vec{v}}{\tau}$ τ : le temps de collision

Réseau est supposé galiléen

PFD aux e^- : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - m \frac{\vec{v}}{\tau}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

on suppose $\vec{E}$ est $\vec{v}$

$$\vec{v} = \vec{A} e^{-t/\tau} + \frac{q\vec{E}\tau}{m}$$

Après quelques fois τ (≈ 5) : $\vec{v} = \frac{q\tau}{m} \vec{E}$ (2)

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \frac{nq^2\tau}{m} \vec{E}$$

Cela explique la loi d'Ohm et permet d'identifier $\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}$

Remarque :

• Si plusieurs espèces de porteurs contribuent : $\sigma = \sum_i \frac{n_i q_i^2 \tau_i}{m_i}$

concentration

solution aqueuse : $n_i = [C_i] V_A$

on retrouve la loi de Kohlrausch

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{I}{\sigma S} \vec{u_x}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_0^l \frac{I}{\sigma S} \vec{u_x} \cdot d\vec{x} \vec{u_x} \end{aligned}$$

$$\mathcal{U} = \frac{I}{\sigma S} l$$

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

Il vaut mieux commencer comme ça

démo à l'envers :

$$\Delta V = 0$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

$$V = Cx + D$$

$$\begin{cases} V_1 = D \\ C = \frac{V_2 - V_1}{l} \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -C \vec{u_x} = \frac{V_1 - V_2}{l} \vec{u_x}$$

$$\vec{j} = \sigma \frac{V_1 - V_2}{l} \vec{u_x}$$

$$I = jS = \sigma \frac{S}{l} U \quad \text{donc} \quad G = \frac{\sigma S}{l}$$

5. Validité de l'ARQS

T : période du courant

L : longueur du circuit

vitesse
lumière

- Dans le vide, le champ électrique se propage à la vitesse c

$$\Delta t = \frac{L}{c}$$

L'ARQP est valable si $\Delta t \ll T$ $\frac{L}{c} \ll T$ $L \ll cT$

bien connaître
ce calcul.

• Ohmique

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\text{et PG : } \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{donc } \text{div}(\gamma \vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

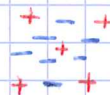
$$\gamma \text{div}(\vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\gamma \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\gamma}{\epsilon_0} = \tau_{\text{relax}}$$

$$\rho(n, t) = \rho(n, 0) e^{-t/\tau_{\text{relax}}}$$

$$\tau_{\text{relax}} = \frac{8,85 \times 10^{-12}}{5,7 \times 10^8} \approx 1,3 \times 10^{-20} \text{ s}$$



Comme les électrons se repoussent, un excès de charges se résorbe très vite.

$$\hookrightarrow t \gg \tau_{\text{relax}} \quad \rho = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{neutre} \Rightarrow \text{div } \vec{j} = 0$$

L'ARQP est valable si $T \gg \tau_{\text{relax}}$.

⚠ à une échelle de temps aussi courte, la loi d'Ohm ne s'applique en réalité plus.

6. Effet Joule

puissance volumique reçue par les porteurs de charge :

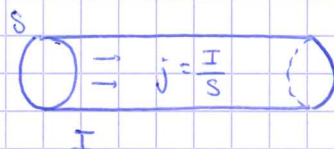
$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \frac{j^2}{\gamma} \quad \leftarrow \text{puissance de l'effet Joule volumique}$$

Cette puissance reçue par les porteurs est aussitôt dissipée par frottement sur le réseau métallique ; le métal s'échauffe : c'est l'effet Joule.

Passage à $P = RI^2$

Cas du fil :

$$p = \frac{j^2}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \frac{I^2}{S^2}$$



$$P = \int p \, d\tau = \frac{1}{\gamma} \frac{I^2}{S^2} \times S\ell$$

$$= \frac{\ell}{\gamma S} I^2$$

$$\Rightarrow P = RI^2$$

III - Effets magnétiques dans les conducteurs ohmiques

Les porteurs peuvent être aussi soumis à $\vec{B}$ (champ magnétique) en plus de $\vec{E}$.

1. Extension de la loi d'Ohm (HP)

$$\vec{F} = -q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} = -q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \text{Généralisation de la loi d'Ohm}$$

ex ou DS.

Selon les cas, il peut en résulter un effet de magnéto-résistance, c-à-d $R(B)$ ou un effet Hall.

2. Effet Hall

cf. Figure 3

Les porteurs sont déviés et s'accumulent sur la face avant.

($\ominus$ à l'avant $\oplus$ à l'arrière)

Il en résulte un nouveau champ électrique dit champ de Hall. $\vec{E}_H$

La déviation et l'accumulation cesse lorsque $\vec{F}_H + \vec{F}_B = 0$

c-à-d lorsque $\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\text{or } \vec{j} = \frac{I}{S} \vec{u}_x \text{ et } \vec{j} = nq\vec{v} \quad 6.$$

$$\text{donc } nq\vec{v} = \frac{I}{S} \vec{u}_x$$

$$\vec{v} = \frac{I}{Snq} \vec{u}_x$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \vec{E}_H &= -\frac{I}{Snq} \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_y \\ &= -\frac{I}{Snq} B \vec{u}_z \end{aligned}$$

Entre les deux faces existe une ddp :

$$\begin{aligned} U_H = V_A - V_C &= \int_A^C \vec{E}_H \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_A^C -\frac{IB}{Snq} \vec{u}_z \cdot d\vec{u}_z \\ &= -\frac{IB}{Snq} a \end{aligned}$$

$$U_H = \frac{IB}{Sne} \quad \text{pour des électrons.}$$

AN: $I = 1 \text{ A}$ $B = 1 \text{ T}$ $a = 10^{-3} \text{ m}$ $S = 10^{-6} \text{ m}^2$ $n = 10^{28}$ $e = 10^{-19}$
 $U_H \approx 10^{-6} \text{ V}$

U_H est souvent petit dans un métal mais est plus élevé dans un semi-conducteur car n est plus petit

Utilisation: on mesure U_H on en déduit B : c'est une sonde à effet Hall.

Fin de l'exemple I.3). cf. Figure 6

$$\vec{j} = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{u}_r \quad \vec{E} = \frac{I}{2\pi r^2 \gamma} \vec{u}_r$$

Entre les pieds du bonhomme, il y a une ddp :

$$U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \frac{I}{2\pi r^2 \gamma} \vec{u}_r \cdot dr \vec{u}_r$$

$$U = \frac{I}{2\pi \gamma} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

risque d'électrocution par les pieds

→ pour réduire les risques, on rapproche les points A et B. (ddp >)